3.3. Svazy

V kapitole 2.4. jsme definovali svaz jako uspořádanou množinu, jejíž každé prvky mají uvnitř této množiny supremum a infimum, tj. definovali jsme svaz jako relační strukturu. V této kapitole budeme definovat svaz rovnocenným způsobem jako algebraickou strukturu a budeme se podrobněji zabývat některými speciálními druhy svazů.

Podobně jako grupoidy, tvoří i svazy skupinu příbuzných algebraických systémů. Na rozdíl od grupoidů, které jsou založeny na jediné výchozí binární operaci, mají svazy dvě základní binární operace s duálními vlastnostmi.

V kapitole 3.4. budeme studovat třetí skupinu algebraických systémů, tzv. okruhy, které opět vycházejí ze dvou základních binárních operací, nikoliv však navzájem duálních.

Definice 3.3.1:

Svaz /angl. lattice/ je algebra $\langle L;\cup,\cap\rangle$ se dvěma základními binárními operacemi $\cup$ /spojení/ a $\cap$ /průsek/, které mají následující vlastnosti /splňují následující axiómy/:

- Univerzalita a jednoznačnost:
  - $(\forall x,y)(\exists_1 z)[x\cup y=z]$ UNs
  - $(\forall x,y)(\exists_1 z)[x\cap y=z]$ UNp
- Asociativita:
  - $(\forall x,y,z)[(x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z)]$ ASs
  - $(\forall x,y,z)[(x\cap y)\cap z=x\cap(y\cap z)]$ ASp
- Komutativita:
  - $(\forall x,y)[x\cup y=y\cup x]$ KOs
  - $(\forall x,y)[x\cap y=y\cap x]$ KOp
- Absorpce:
  - $(\forall x,y)[x\cup(x\cap y)=x]$ ABs
  - $(\forall x,y)[x\cap(x\cup y)=x]$ KOp

Axiómy charakterizující operace spojení a průseku jsou navzájem duální /axiómy XXp vzniknou z axiómů XXs vzájemnou záměnou operátorů $\cup$ a $\cap$ / a tedy také samotné operace jsou ***navzájem duálními***.

Příklady 3.3.1:

- Množinový svaz $\langle 2^A;\cup,\cap\rangle$: systém všech podmnožin množiny A vzhledem k operacím sjednocení a průniku.
- Elementární logický svaz $\langle\{0,1\};\vee,\wedge\rangle$: množina pravdivostních hodnot vzhledem k operacím disjunkce a konjunkce.
- $\langle R;\max,\min\rangle$: množina všech reálných čísel vzhledem k operacím maxima a minima.
- $\langle N;nsn,nsd\rangle$: množina všech přirozených čísel vzhledem k operacím nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

Věta 3.3.1:

1. Zákony idempotence:
   - $(\forall x)[x\cup x=x]$ IDs
   - $(\forall x)[x\cap x=x]$ IDp
2. $(\forall x,y)[x\cup y=y \Leftrightarrow x\cap y=x]$

Důkaz:

Ad 1)	IDs: (1) $x \cup (x \cap y) = x$	axióm ABs
	(2) $x \cup (x \cap (x \cup x)) = x$	z (1) dosazením $y := x \cup x$
	(3) $x \cup x = x$	z (2) podle axiómu ABp
	IDp: duálně	
Ad 2)	$\Rightarrow$: (1) $x \cup y = y$	předpoklad
	(2) $x \cup (x \cap y) = x \cap y$	z (1) dosazením $y := x \cup y$
	(3) $x = x \cap y$	z (2) podle axiómu ABs
	$\Leftarrow$: duálně	

Věta 3.3.2:

Definujme na nosiči svazu $\langle L; \cup, \cap \rangle$ relace $\subseteq, \subset$ takto:

$$x \subseteq y \ \Leftrightarrow_{def}\ x \cup y = y,$$
$$x \subset y \ \Leftrightarrow_{def}\ x \subseteq y \wedge x \neq y.$$

Potom: 1. Relace $\subseteq$ je uspořádáním, tj. má vlastnosti RE,AN,TR.
2. Relace $\subset$ je ostrým uspořádáním, tj. má vlastnosti IR,AS,TR.

Důkaz:

Ad 1) RE: $x \cup x = x \Rightarrow x \subseteq x$
AN: $x \subseteq y,\ y \subseteq x \Rightarrow x \cup y = y,\ y \cup x = x \Rightarrow x = y$
TR: $x \subseteq y,\ y \subseteq z \Rightarrow x \cup y = y,\ y \cup z = z \Rightarrow (x \cup y) \cup z = z \Rightarrow x \cup (y \cup z) = z \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cup z = z \Rightarrow x \subseteq z$

Ad 2) IR: sporem: $x \subset x \Rightarrow x \cup x = x \wedge x \neq x$
AS: sporem: $x \subset y,\ y \subset x \Rightarrow x \cup y = y \wedge y \cup x = y \wedge x \neq y \Rightarrow x = y \wedge x \neq y$
TR: $x \subset y,\ y \subset z \Rightarrow x \cup y = y \wedge y \cup z = z \wedge x \neq y \wedge y \neq z \Rightarrow (x \cup y) \cup z = z \wedge x \neq z$
$\Rightarrow x \cup (y \cup z) = z \wedge x \neq z \Rightarrow x \cup z = z \wedge x \neq z \Rightarrow x \subset z$

Věta 3.3.3:

Operace spojení a průseku $\cup, \cap$ jsou - vzhledem k uspořádání $\subseteq$ - supremem a infimem /porovnej s definicí 2.4.3 pro případ dvouprvkové mno žiny $M = \{x, y\}$/:

- $x \subseteq x \cup y,\ y \subseteq x \cup y$ SUP1 /$x \cup y$ je horní závora/
- $x \subseteq z,\ y \subseteq z \Rightarrow x \cup y \subseteq z$ SUP2 /$x \cup y$ je nejmenší horní závora/
- $x \cap y \subseteq x,\ x \cap y \subseteq y$ INF1 /$x \cap y$ je dolní závora/
- $z \subseteq x,\ z \subseteq y \Rightarrow z \subseteq x \cap y$ INF2 /$x \cap y$ je největší dolní závora/

Důkaz:

SUP1:	(1) $x \cup y = x \cup y$	identita /axióm rovnosti/
	(2) $(x \cup x) \cup y = x \cup y$	z (1) s využitím ID
	(3) $x \cup (x \cup y) = x \cup y$	z (2) s využitím AS
	(4) $x \subseteq x \cup y$	ze (3) podle definice $\subseteq$
SUP2:	(1) $x \subseteq z,\ y \subseteq z$	předpoklady
	(2) $x \cup z = z,\ y \cup z = z$	z (1) podle definice $\subseteq$
	(3) $(x \cup z) \cup (y \cup z) = z \cup z$	spojením rovností z (2)
	(4) $(x \cup y) \cup z = z$	ze (3) s využitím AS,KO,ID
	(5) $x \cup y \subseteq z$	z (4) podle definice $\subseteq$

INF1, INF2: dokáží se obdobně jako vlastnosti SUP1, SUP2.

Poznámky 3.3.1:

1. Definujeme-li obráceně operace $\cup, \cap$
pomocí vlastností SUP1, SUP2, INF1, INF2 jako supremum a infimum, pak m

ůžeme dokázat, že takto definované supremum a infimum splňuje axiómy UN, AS, KO, AB /s,p/.

Důkaz:

UNs: Samozřejmé.

ASs: Označme $d=a\cup(b\cup c)$, $f=(a\cup b)\cup c$ a dokažme $f\subseteq d$ a $d\subseteq f$, tj. $d=f$.

(1)	$a\subseteq d$	podle definice prvku d
(2)	$b\cup c\subseteq d$	podle definice prvku d
(3)	$b\subseteq d$	z (2)
(4)	$c\subseteq d$	z (2)
(5)	$a\cup b\subseteq d$	z (1) a (3) podle SUP2
(6)	$(a\cup b)\cup c\subseteq d$	z (5) a (4) podle SUP2
(7)	$f\subseteq d$	z (6) podle definice prvku f

$d\subseteq f$ se dokáže obdobně.

KOs: Označme $c=a\cup b$, $d=b\cup a$ a dokažme $c=d$.

(1)	$a\subseteq c$	podle definice prvku c
(2)	$b\subseteq c$	podle definice prvku c
(3)	$b\cup a\subseteq c$	z (1) a (2) podle SUP2
(4)	$d\subseteq c$	z (3) podle definice prvku d

$c\subseteq d$ se dokáže obdobně.

ABs: Označme $c=a\cup(a\cap b)$ a dokažme $c=a$.

(1)	$a\subseteq c$	podle definice prvku c a SUP1
(2)	$a\cap b\subseteq a$	podle INF1
(3)	$a\subseteq a$	reflexivita $\subseteq$
(4)	$a\cup(a\cap b)\subseteq a$	z (3) a (2) podle SUP2
(5)	$c\subseteq a$	z (4) podle definice prvku c
(6)	$c=a$	z (1) a (5) a antisymetrie $\subseteq$

UNp,AAp,KOp,ABp se dokáží obdobně.

2\. Věta 3.3.3 spolu s předchozí poznámkou ukazují, že pojem svazu lze definovat dvojím naprosto rovnocenným způsobem:

- jako ***relační strukturu*** $\langle L;\subseteq\rangle$, kde $\subseteq$ je tzv. ***svazové uspořádání*** množiny L, tj. uspořádání ve kterém existují ke každým dvěma prvkům supremum a infimum splňující axiómy SUP1,2 a INF1,2/ - viz definice 2.4.4.
- jako ***algebraickou strukturu*** $\langle L;\cup,\cap\rangle$, kde $\cup,\cap$ jsou operace splňující axiómy UN,AS,KO,AB-s,p/- viz definice 3.3.1.

Definice 3.3.2:

Úplný svaz je svaz $\langle L;\subseteq\rangle$ s vlastností: nejenom ke každým dvěma prvkům z L existují v L supremum a infimum, ale dokonce k libovolné neprázdné podmnožině $A\subseteq L$ existuje v L její supremum supA a infimum infA.

Poznámky 3.3.2:

1. Protože $L\subseteq L$, má i L v L své supremum, tzv ***jedničku svazu*** 1=supL a infimum, tzv. ***nulu svazu*** 0=infL.
2. Každý konečný svaz je úplný.
3. Nekonečný svaz nemusí být úplný. Tak např. svaz $\langle Q\cap\langle 1,2\rangle;\le\rangle$ racionálních čísel z uzavřeného intervalu $\langle 1,2\rangle$ s přirozeným uspořádáním $\le$ není úplný, neboť rostoucí posloupnost racionálních čísel z tohoto intervalu, konvergující k iracionálnímu číslu opět z tohoto intervalu, nemá v tomto intervalu supremum. Naproti tomu obdobný svaz $\langle R\cap\langle 1,2\rangle;\le\rangle$ reálných čísel úplný je.

4.

Z existence jedničky a nuly svazu nevyplývá úplnost svazu. Tak např. neúplný svaz $\langle Q\cap\langle 1,2\rangle;\leq\rangle$ má nulu /číslo 1/ i jedničku /číslo 2/.

Věta 3.3.4:

Nechť $\langle L;\subseteq\rangle$ je úplný svaz. Potom pro nulu /0/ a jedničku /1/ svazu platí:

- $x\cup 0=0\cup x=x$ NUs $x\cap 0=0\cap x=0$ NUp
- $x\cup 1=1\cup x=1$ Jes $x\cap 1=1\cap x=x$ JEp

Důkaz:

- $0\subseteq x\subseteq 1$ podle definice nuly a jedničky svazu
- $0\subseteq x \Rightarrow 0\cup x=x \Rightarrow 0\cap x=0$ podle definice relace $\subseteq$ a věty 3.3.1
- $x\subseteq 1 \Rightarrow x\cup 1=1 \Rightarrow x\cap 1=x$ podle definice relace $\subseteq$ a věty 3.3.1

Definice 3.3.3:

Distributivní svaz je svaz ve kterém platí axiómy distributivity:

- $x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z)$ DIs
- $x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$ DIp

Poznámka 3.3.3:

Jedná se o ***levé*** distributivní zákony. Platí také ***pravé*** distributivní zákony, není však nutné je postulovat jako axiómy, protože je možné je odvo dit pomocí levých distributivních zákonů a zákonů komutativity.

Věta 3.3.5:

V distributivním svazu platí:

$$x\cup y=x\cup z \;\wedge\; x\cap y=x\cap z \;\Rightarrow\; y=z.$$

Důkaz:

$y=y\cup(x\cap y)=y\cup(x\cap z)=(y\cup x)\cap(y\cup z)=(x\cup z)\cap(y\cup z)=(x\cup y)\cap z=(x\cup z)\cap z=z.$

Použili jsme postupně: AB, předpoklad, DI, předpoklad+KO, DI, předpoklad, A B.

Poznámka 3.3.4:

Pro grupové násobení platí pravidla o krácení /viz věta 3.2.1/

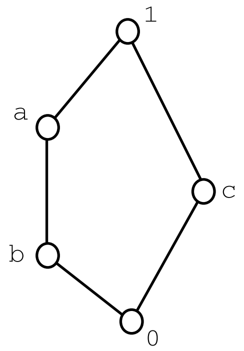
$$x.y=x.z \;\Rightarrow\; y=z, \qquad y.x=z.x \;\Rightarrow\; y=z.$$

Pro svazové spojování a protínání obdobné pravidlo neplatí, viz např.:

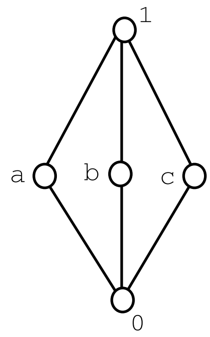
$$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3\}\cup\{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{1,2,3\}\cap\{2,3,4,5\}.$$

Věta 3.3.6:

Svaz je distributivní právě tehdy, když neobsahuje podsvaz isomorfní se svazem typu pentagon /viz obr.3.3.1/ nebo diamant /viz obr.3.3.2/.



Obr.3.3.1. Pentagon



Obr.3.3.2. Diamant

Důkaz:

Pro pentagon např.platí $a\cap(b\cup c)=a\cap 1=a$, ale $(a\cap b)\cup(a\cap c)=b\cup 0=b$, tj. neplatí distributivní zákon DIp. Podobně pro diamant např. platí $a\cap(b\cup c)=a\cap 1=a$, ale $(a\cap b)\cup(a\cap c)=0\cup 0=0$, tj. neplatí DIp.

Důkaz obráceného tvrzení /každý svaz ve kterém obecně neplatí distributivní zákony, obsahuje podsvaz typu pentagon nebo diamant/ je obtížný.

Definice 3.3.4:

Komplementární svaz je svaz $\langle L;\cup,\cap,0,1\rangle$ s nulou a jedničkou ve kterém ke každému prvku $x\in L$ existuje prvek $x'\in L$ takový, že:

- $x\cup x'=1$ DOs
- $x\cap x'=0$ DOp

Prvek x′ se nazývá ***doplňkovým*** /***komplementárním***/ prvkem k prvku x.

Poznámky 3.3.5:

1. $(x')'=x$, tj. prvky x,x' jsou doplňkovými navzájem.
2. Doplňkových prvků k danému prvku může být obecně více /viz pentagon nebo diamant/, distributivní svazy však mají ke každému prvku nejvýše jeden doplňkový prvek /viz následující věta/.

Věta 3.3.7:

V distributivním svazu existuje nejvýše jeden komplementární prvek k danému prvku.

Důkaz:

Sporem. Nechť x',x^+ jsou dva komplementární prvky k prvku x svazu. Potom platí:

$$x\cup x'=1,\ x\cap x'=0,\qquad x\cup x^+=1,\ x\cap x^+=0.$$

Na základě těchto vztahů dostáváme pomocí axiómů JE a DI:

$$x^+=1\cap x^+=(x\cup x')\cap x^+=(x\cap x^+)\cup(x'\cap x^+)=0\cup(x'\cap x^+)=x'\cap x^+,$$
$$x'=1\cap x'=(x\cup x^+)\cap x'=(x\cap x')\cup(x^+\cap x')=0\cup(x^+\cap x')=x^+\cap x'$$

a tedy $x^+=x'$.

Definice 3.3.8:

Booleův svaz /***Booleova algebra***/ je svaz, který je současně distributivní a komplementární.

Poznámky 3.3.6:

1. Booleův svaz je algebra se dvěma binárními operacemi $\cup,\cap$, jednou unární operací doplňkového prvku a dvěma nulárními operacemi svazové nuly a jedničky, tj. algebra $\langle L;\cup,\cap,',0,1\rangle$
2. Booleovu algebru můžeme definovat nezávisle na obecném pojmu svazu jako algebru s uvedenými pěti operacemi, které jsou charakterizovány množinou dvojic duálních axiómů:
   - UN /univerzality a jednoznačnosti/,
   - AS /asociativity/,
   - KO /komutativity/,
   - AB /absorpce/,
   - NU /nulového prvku/,
   - JE /jednotkového prvku/,
   - DI /distributivity/ ,
   - DO /doplňkového prvku/.

Příklady 3.3.2:

- $\langle 2^A;\cup,\cap,',\emptyset,A\rangle$ ... množinová Booleova algebra všech podmnožin množiny A. Komplementárním prvkem k množině X je množina $X'=A\setminus X$, nulovým prvkem prázdná množina a jednotkovým prvkem množina A.
- $\langle\{0,1\};\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ ... základní logická Booleova algebra.
- $\langle\{0,1\}^n;\vee,\wedge,\neg,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$ ... vektorová logická Booleova algebra /n-tá direktní mocnina základní logické B. algebry/.

Věta 3.3.8:

Nechť $\langle B;\cup,\cap,',0,1\rangle$ je libovolná Booleova algebra. Potom pro všechna $x,y\in B$ platí:

1. $(x')'=x$ /zákon involuce/
2. $(x\cup y)'=x'\cap y'$, $(x\cap y)'=x'\cup y'$ /de Morganovy zákony/
3. $x\subseteq y \Leftrightarrow y'\subseteq x'$
4. $x\subseteq y \Leftrightarrow x'\cup y=1 \Leftrightarrow x\cap y'=0$

Důkaz:

Ad 1) Podle definice doplňkového prvku platí:

$$x'\cup(x')' = 1 = x'\cup x,$$
$$x'\cap(x')' = 0 = x'\cap x.$$

Odtud na základě dokázané vlastnosti /věta 3.3.5/

$$x\cup y=x\cup z \wedge x\cap y=x\cap z \Rightarrow y=z$$

dostáváme

$$(x')'=x.$$

Ad 2) Dokážeme první z obou duálních zákonů. Použitím distributivního zákona dostáváme

$$(x\cup y)\cup(x'\cap y')=(x\cup y\cup x')\cap(x\cup y\cup y')=1\cap 1=1,$$
$$(x\cup y)\cap(x'\cap y')=(x\cap x'\cap y')\cap(y\cap x'\cap y')=0\cap 0=0.$$

tj. $x\cup y$, $x'\cap y'$ jsou navzájem komplementární a tedy

$$(x\cup y)'=x'\cap y'.$$

Ad 3) $x\subseteq y \Leftrightarrow x\cup y=y \Leftrightarrow y'=(x\cup y)' \Leftrightarrow y'=x'\cap y' \Leftrightarrow y'\subseteq x'$

Definice 3.3.9:

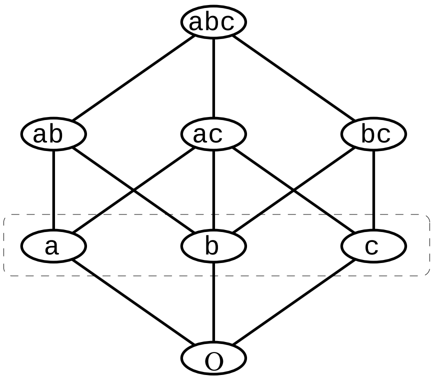
Atom Booleovy algebry $\langle B;\cup,\cap,',0,1\rangle$ je prvek $a\in B$ s vlastností

$$(\forall x\in B)[x\subset a \Rightarrow x=0],$$

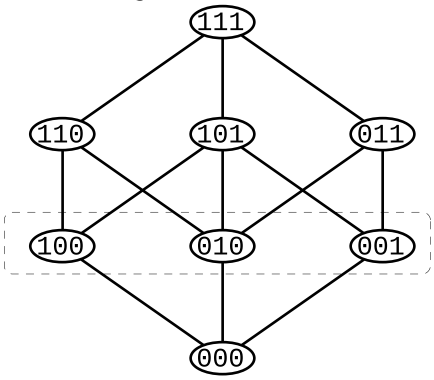
tj. prvek, pod kterým se nachází již pouze nula.

Příklady 3.3.3:

- Atomy Booleovy algebry $<2^{\{a,b,c\}};\cup,\cap,',\emptyset,A>$ jsou jednoprvkové množiny {a},{b},{c} - viz Haaseův diagram na obr.3.3.3.
- Atomy vektorové logické algebry $<\{0,1\}^3;\vee,\wedge,\neg,\mathbf{0},\mathbf{1}>$ jsou vektory (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) - viz Haaseův diagram na obr.3.3.4.



atomy



Obr.3.3.3. Množinová B.algebra

Obr.3.3.4. Vekt.logická B.algebra

Věta 3.3.9:

Libovolný nenulový prvek Booleovy algebry $<B;\cup,\cap,',0,1>$ lze vyjádřit jako spojení těch atomů nad kterými leží, tj. pro každé $x\in B$, $x\neq 0$ platí

$$x=a_1\cup a_2\cup...\cup a_k,$$

kde $a_1,a_2,...,a_k$ jsou právě všechny atomy, pro které platí $a_i\subseteq x$.

Důkaz:

1. Nechť $x=a_1\cup a_2\cup...\cup a_k$. Pak x leží nad všeni atomy $a_1,a_2,..,a_k$ a nad žádnými jinými atomy.
   Důkaz:
   - x leží nad všemi atomy $a_1,a_2,..,a_k$
     dk: $a_i\subseteq x$ podle vlastnosti suprema /SUP1/.
   - x neleží nad žádným jiným atomem
     dk sporem: Nechť $a\subseteq x$, $a\notin\{a_1,a_2,..,a_k\}$. Potom /podle DI/:
     $$a=a\cap x=a\cap(a_1\cup a_2\cup...\cup a_k)=(a\cap a_1)\cup(a\cap a_2)\cup...\cup(a\cap a_k).$$
     Je-li pro všechna i $a_i\neq a$, pak a=0 a tedy není atomem.
2. Nechť x leží nad všemi atomy $a_1,a_2,..,a_k$ a nad žádným jinými atomy. Pak $x=a_1\cup a_2\cup...\cup a_k$.
   Důkaz:
   Označíme $y=a_1\cup a_2\cup...\cup a_k$ a dokážeme $y\subseteq x$, $x\subseteq y$.
   - Z $a_1\subseteq x$ a $a_2\subseteq x$ vyplývá $a_1\cup a_2\subseteq x$ /podle vlastnosti SUP2/. Odtud indukcí $a_1\cup a_2\cup...\cup a_k\subseteq x$, tj. $y\subseteq x$.
   - Vztah $x\subseteq y$ je ekvivalentní se vztahem $x\cap y'=0$. Předpokládejme naopak, že platí $x\cap y'\neq 0$ /důkaz sporem/. Potom existuje atom a takový, že $a\subseteq x\cap y'$. Odtud vyplývá $a\subseteq x$, $a\subseteq y'$. Z $a\subseteq x$ plyne, že a je jeden z atomů $a_1,a_2,..,a_k$ a tedy $a\subseteq a_1\cup a_2\cup...\cup a_k$. Z $a\subseteq y'$ plyne $a\subseteq(a_1\cup a_2\cup...\cup a_k)'$. Tedy
     $$a\subseteq(a_1\cup a_2\cup...\cup a_k)\cap(a_1\cup a_2\cup...\cup a_k)'=0,$$

tj. a=0 a tedy a není atom. Dospěli jsme ke sporu, $x\cap y'\neq 0$ neplatí, platí tedy $x\cap y'=0$ a tedy také $x\subseteq y$.

Věta 3.3.10:

Nechť $\langle B;\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$ je libovolná konečná Booleova algebra s množinou atomů A. Potom tato algebra je isomorfní s množinovou Booleovou algebrou $\langle 2^A;\cup,\cap,',\emptyset,A\rangle$.

Důkaz:

Máme dokázat, že existuje bijekce $h:B\to 2^A$ zachovávající všechny operace, tj. bijekce pro kterou platí:

$$h(x\vee y)=h(x)\cup h(y),$$
$$h(x\wedge y)=h(x)\cap h(y),$$
$$h(\neg x)=(h(x))',$$
$$h(0)=\emptyset,\ h(1)=A.$$

Takovou bijekcí je následující zobrazení:

$$h(x) = \emptyset \qquad \text{pro } x=0,$$
$$h(x) = A_x=\{a\in A:\ a\subseteq x\} \qquad \text{pro } x\neq 0.$$

Každému nenulovému prvku x je přiřazena zobrazením h množina atomů nad kterými tento prvek leží. Toto přiřazení je podle věty 3.3.9 vzájemně jednoznačné a tedy h je vskutku bijekcí.

Nenulové prvky lze jednoznačně vyjádřit jako spojení příslušných atomů /jednoznačně až na pořadí, které je však vzhledem ke komutativitě nepodstatné/:

$$x=a_{x1}\vee a_{x2}\vee\ldots\vee a_{xr},\quad y=a_{y1}\vee a_{y2}\vee\ldots\vee a_{ys}.$$

Odtud

$$x\vee y=(a_{x1}\vee a_{x2}\vee\ldots\vee a_{xr})\vee(a_{y1}\vee a_{y2}\vee\ldots\vee a_{ys}),$$
$$x\wedge y=(a_{x1}\vee a_{x2}\vee\ldots\vee a_{xr})\wedge(a_{y1}\vee a_{y2}\vee\ldots\vee a_{ys})=(a_{w1}\vee a_{w2}\vee\ldots\vee a_{wt})$$

/neboť pro atomy platí $a\wedge b=0$ pro $a\neq b$, $a\wedge b=a$ pro $a=b$/ a tedy platí:

$$h(x\vee y)=A_x\cup A_y=h(x)\cup h(y),$$
$$h(x\wedge y)=A_x\cap A_y=h(x)\cap h(y).$$

Rovnost $h(0)=\emptyset$ platí z moci definice a rovnost $h(1)=A$ vyplývá ze skutečnosti, že jednotka Booleovy algebry leží nad všemi atomy.

Zbývá dokázat $h(\neg x)=(h(x))'$. Z rovností

$$x\vee\neg x=1,\quad x\wedge\neg x=0$$

a z již dokázaných vlastností plyne

$$h(x\vee\neg x)=h(x)\cup h(\neg x)=h(1)=A,$$
$$h(x\wedge\neg x)=h(x)\cap h(\neg x)=h(0)=\emptyset,$$

a odtud dokazovaná rovnost.

Důsledky:

1. Počet prvků libovolné konečné Booleovy algebry je roven mocnině čísla 2 /tj. je roven 2^k pro vhodné k/.
2. Každé dvě Booleovy algebry o stejném počtu prvků jsou isomorfní.

Věta 3.3.11:

Každá konečná Booleova algebra je isomorfní s jistou vektorovou logickou algebrou $\langle\{0,1\}^k;\vee,\wedge,\neg,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$, tj. s vhodnou direktní mocninou základní logické algebry $\langle\{0,1\};\vee,\wedge,\neg,0,1\rangle$.

Důkaz:

Operace $\vee, \wedge, \neg$, **0**, **1** jsou pro $\mathbf{x}=(x_1,x_2,..,x_k)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,..,y_k)$ z $\{0,1\}^k$ definovány takto:

$\mathbf{x}\vee\mathbf{y} = (x_1\vee y_1, x_2\vee y_2, ..., x_k\vee y_k)$,

$\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = (x_1\wedge y_1, x_2\wedge y_2, ..., x_k\wedge y_k)$,

$\neg\mathbf{x} = (\neg x_1, \neg x_2, ..., \neg x_k)$, $\mathbf{0} = (0,0,...,0)$, $\mathbf{1} = (1,1,...,1)$.

Jelikož každá konečná Booleova algebra s množinou atomů A je isomorfní s množinovou Booleovou algebrou s nosičen 2^A /viz věta 3.3.10/, postačí dokázat, že každá množinová algebra $\langle 2^A; \cup, \cap, ', \emptyset, A\rangle$, kde $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, je isomorfní s algebrou $\langle\{0,1\}^k; \vee, \wedge, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$.

Zobrazení $h: 2^A \to \{0,1\}^k$ zprostředkující tento isomorfismus je definováno takto:

$$h(x)=(n_1,n_2,...,n_k)\in\{0,1\}^k,$$

kde $n_i=1$, je-li $a_i\in x$ nebo $n_i=0$, je-li $a_i\notin x$. Je zřejmé, že h je bijekce a že platí:

$$h(x\cup y)=h(x)\vee h(y),\quad h(x\cap y)=h(x)\wedge h(y),$$
$$h(x')=\neg h(x),\quad h(\emptyset)=\mathbf{0},\quad h(A)=\mathbf{1}.$$

Zobrazení h(x), přiřazující každé podmnožině $x\in A$ její charakteristický vektor $(n_1,n_2,...,n_k\}$, se nazývá ***přirozeným isomorfismem*** algebry $\langle 2^A; \cup, \cap, ', \emptyset, A\rangle$ do algebry $\langle\{0,1\}^k; \vee, \wedge, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$.

Důsledky:

1. Každá 2-prvková Booleova algebra je isomorfní se základní logickou Booleovou algebrou.
2. Haaseovy diagramy Booleových algeber jsou n-rozměrné krychle.