2.4. Relace typu uspořádání

Definice 2.4.1:

Relace ρ na množině X je /částečné a neostré/ ***uspořádání***, jestliže je současně reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Relace ρ na množině X je ***úplné*** /neostré/ ***uspořádání***, jestliže je současně reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a souvislá.

Relace ρ na množině X je /částečné/ ***ostré uspořádání***, jestliže je současně asymetrická /a tedy také ireflexivní a antisymetrická - viz věta 2.2.2/ a tranzitivní.

Relace ρ na množině X je ***úplné ostré uspořádání***, jestliže je současně asymetrická /a tedy také ireflexivní a antisymetrická/, tranzitivní a souvislá.

Všechny výše uvedené druhy relací nazýváme ***relacemi typu uspořádání***.

Místo termínu částečné užíváme také termín ***parciální*** a místo termínu úplné také termíny ***totální*** nebo ***lineární***.

Je-li ρ uspořádání na množině X, pak dvojici /relačnímu systému/ $\langle X,\rho \rangle$ říkáme ***uspořádaná množina***. Úplně uspořádané množině říkáme ***řetězec***.

Poznámky 2.4.1:

1. Dva různé prvky x,y jsou ***srovnatelné*** v uspořádání ρ, jestliže platí $x\rho y \vee y\rho x$. V opačném případě, tj. platí-li $\neg(x\rho y \vee y\rho x)$, nazývají se prvky x,y ***nesrovnatelné***. V úplném /lineárním/ uspořádání jsou každé dva prvky srovnatelné.
2. Označuje-li symbol $\leq$ neostré uspořádání /částečné nebo úplné/ na množině X, pak symbol $<$ označuje ***sdružené ostré uspořádání*** /částečné nebo úplné/ na téže množině. Mezi relačními symboly /relátory/ předpokládáme vždy tuto vazbu:

   $$x<y \Leftrightarrow x\leq y \wedge x\neq y, \quad \text{neboli:} \quad x\leq y \Leftrightarrow x<y \vee x=y.$$

   Má-li relace $\leq$ vlastnost RE a AN, pak relace $<$ má vlastnost IR a AS /a obráceně/.
3. Relace typu uspořádání jsou - vzhledem k vlastnosti TR - většinou rozsáhlými relacemi. Proto, podobně jako relace typu ekvivalence, je reprezentujeme jinými menšími relacemi, z nichž se dají původní relace uspořádání jednoznačně rekonstruovat. Podstatnou roli přitom hraje operace redukce relace - viz definice 2.4.2.
4. Průnik uspořádání je opět uspořádáním. Sjednocení uspořádání nemusí být obecně uspořádáním. Inverze uspořádání je opět uspořádáním /duální k původnímu/. Direktní součin /mocnina/ uspořádání je opět uspořádáním, úplnost uspořádání se však na direktní součin nepřenáší.

Příklady 2.4.1:

1. Nejjednodušší příklady:
   - $\subseteq$ ... na systému všech podmnožin dané množiny je částečné a neostré uspořádání
   - $\leq$ ... na množině reálných čísel je úplné a neostré uspořádání
   - $\subset$ ... na systému všech podmnožin dané množiny je částečné a ostré uspořádání
   - $<$ ... na množině reálných čísel je úplné a ostré uspořádání

Dvě množiny, z nichž jedna je podmnožinou druhé jsou srovnatelné. Dvě disjunktní množiny jsou nesrovnatené /nesrovnatelné mohou být i množiny , které nejsou disjunktní/. Každá dvě reálná čísla jsou srovnatelná.

Relace $\subseteq,\subset$ jsou vzájemně sdružené a stejně tak i relace $\leq,<$.

2.

Relace "x dělí y" je relací uspořádání na množině přirozených čísel. Formálně můžeme tuto relaci zapisovat a definovat takto:

$$x|y \Leftrightarrow_{def} (\exists z)[y=x.z].$$

Snadno ověříme, že relace | má vlastnosti RE,AN,TR.

Definice 2.4.2:

Redukce relace ρ je relace $\rho_r=\rho\backslash\rho^2$ /symbol "\" je symbolem množinového rozdílu/.

Je-li relace ρ relací ostrého uspořádání /částečného nebo úplného/, pak se redukce ρ_r nazývá ***relací pokrytí*** nebo r***elací bezprostředního předcházení***.

Poznámky 2.4.2:

1. Redukce ρ_r vznikne z původní neredukované relace ρ vyloučením všech těch dvojic $\langle x,y\rangle\in\rho$, pro které existuje zprostředkující prvek z /pro tento prvek platí: $\langle x,z\rangle\in\rho$, $\langle z,y\rangle\in\rho$/. Je-li $x\rho_r y$, říkáme, že prvek x je pokrýván prvkem y, nebo, že prvek y kryje prvek x.
2. Platí: ρ je reflexivní $\Rightarrow$ $\rho_r=\omega$ /ω označuje prázdnou relaci/.
   Důkaz: 1. $x\rho^2y \Leftrightarrow (\exists z)[x\rho z \wedge z\rho y]$
   2. $x\rho^2x \Leftrightarrow (\exists z)[x\rho z \wedge z\rho x]$
   3. $x\rho^2x \Leftrightarrow x\rho x \wedge x\rho x$
   4. $x\rho^2x \Leftrightarrow x\rho x$
   5. $\rho^2 = \rho$
   6. $\rho_r = \rho\backslash\rho^2=\omega$
3. Platí: ρ je ostré uspořádání na množině reálných čísel $\Rightarrow$ $\rho_r=\omega$.
   Důkaz: 1. $(\forall x,y)[x\rho y \Rightarrow (\exists z)[x\rho z \wedge z\rho y]]$
   2. $x\rho y \Rightarrow x\rho^2y$
   3. $\rho\subseteq\rho^2$
   4. $\rho_r = \rho\backslash\rho^2=\omega$
4. ***Haaseův diagram*** relace ρ typu uspořádání je grafový diagram relace $(\rho\backslash\delta)_r$, kreslený tak, že všechny orientované hrany směřují vzhůru, takže jejich orientaci netřeba na obrázku vyznačovat. Haaseův diagram relace ρ získáme z diagramu relace ρ tak, že:
   1. vyloučíme všechny elementární smyčky,
   2. zrušíme všechny hrany $\langle x,y\rangle$, které mohou být nahrazeny dvojicí hran $\langle x,z\rangle,\langle z,y\rangle$,
   3. topologicky transformuje diagram tak, aby všechny orientované hrany mířily vzhůru.

Věta 2.4.1:

Nechť ρ je neostré uspořádání na konečné množině X a $\sigma=\rho\backslash\delta$ je s ním sdružené ostré uspořádání. Potom platí:

(1) $(\sigma_r)^+ = \sigma$,

(2) $(\sigma_r)^* = \rho$.

Redukce σ_r je minimální relace, ze které jsou uspořádání σ a ρ rekonstruovatelné.

Důkaz:

(1): - $(\sigma_r)^+ \subseteq \sigma$

Důkazem je následující implikační řetězec:

$\sigma_r = \sigma \setminus \sigma^2 \Rightarrow \sigma_r \subseteq \sigma \Rightarrow (\sigma_r)^+ \subseteq \sigma^+ = \sigma$

- $\sigma \subseteq (\sigma_r)^+$

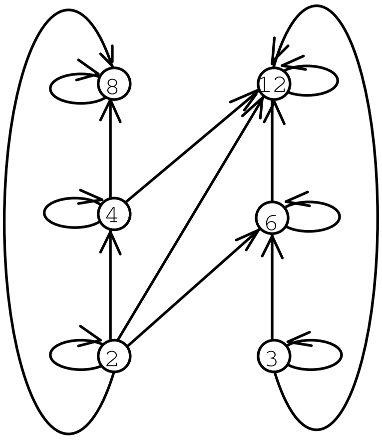
Důkazem je následující implikační řetězec:

1. $x\sigma y \Rightarrow$
2. $\Rightarrow x\sigma z_1 \wedge z_1 \sigma z_2 \wedge \ldots \wedge z_k \sigma y \Rightarrow$
   - všechna z_i jsou nutně různá, jinak by σ byla SY,
   - počet z_i je nutně konečný, neboť X je konečná,
   - předpokládáme, že $z_1, z_2, \ldots, z_k$ je nejdelší posloupnost ze všech možných /je-li takových posloupností více, vybereme libovolnou z nich/
3. $\Rightarrow x\sigma_r z_1 \wedge z_1 \sigma_r z_2 \wedge \ldots \wedge z_k \sigma_r y \Rightarrow$
4. $\Rightarrow x(\sigma_r)^{k+1} y \Rightarrow$
5. $\Rightarrow x(\sigma_r)^+ y$

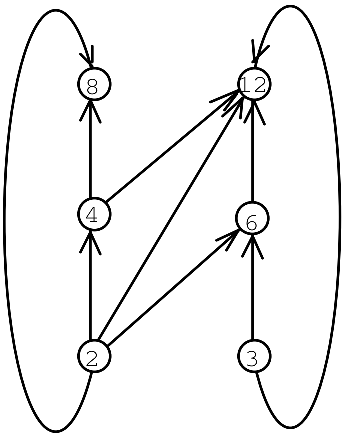
(2): $\rho = \sigma \cup \delta = (\sigma_r)^+ \cup \delta = (\sigma_r)^*$

Příklad 2.4.2:

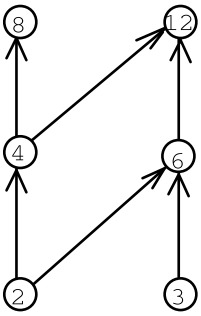
Nechť ρ je relace dělitelnosti | na množině {2,3,4,6,8,12}. Grafové diagramy relací ρ, $\sigma = \rho \setminus \delta$ a σ_r jsou na obrázcích 2.4.1.



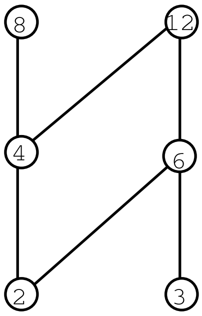
relace ρ



relace $\sigma = \rho \setminus \delta$



relace σ_r



Haaseův diagram rel. ρ a σ

Definice 2.4.3:

Nechť $\leq$ je uspořádání na množině X /říkáme také, že relační systém $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina/ a nechť $M \subseteq X$. Potom:

- a je ***minimální prvek*** množiny M, jestliže:

  $a \in M \wedge \neg(\exists x \in M)[x < a]$.

- a je ***maximální prvek*** množiny M, jestliže:

$a \in M \wedge \neg(\exists x \in M)[a < x]$.

- a je ***nejmenší prvek*** množiny M, jestliže:

  $a \in M \wedge (\forall x \in M)[a \leq x]$.
- a je ***největší prvek*** množiny M, jestliže:

  $a \in M \wedge (\forall x \in M)[x \leq a]$.
- a je ***dolní závora*** množiny M, jestliže:

  $(\forall x \in M)[a \leq x]$.
- a je ***horní závora*** množiny M, jestliže:

  $(\forall x \in M)[x \leq a]$.
- a je ***infimum*** množiny M /a = inf M/, jestliže a je největší ze v šech dolních závor množiny M, tj. je-li:

  $(\forall x \in M)[a \leq x] \wedge (\forall b)[(\forall x \in M)[b \leq x] \Rightarrow b \leq a]$.
- a je ***supremum*** množiny M /a = sup M/, jestliže a je nejmenší ze všech horních závor množiny M, tj. je-li:

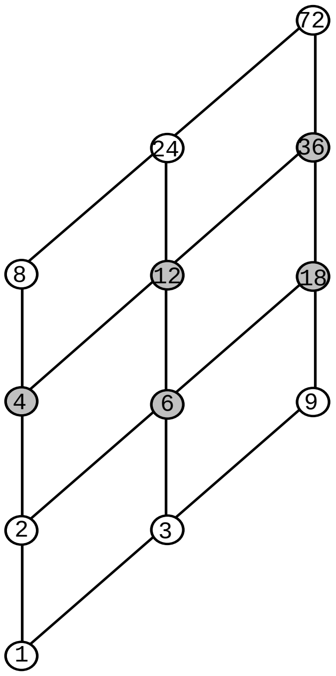
  $(\forall x \in M)[x \leq a] \wedge (\forall b)[(\forall x \in M)[x \leq b] \Rightarrow a \leq b]$.

Poznámky 2.4.3:

1. Nejmenší prvek je také minimálním prvkem a je jediný. Minimálních prv ků může být více a žádný z nich nemusí být nejmenším prvkem. Podobně nej větší prvek je také maximálním prvkem a je jediný. Maximálních prvků mů že být více a žádný z nich nemusí být největším prvkem.
2. Dolní a horní závora, infimum a supremum množiny M může do množiny M patřit, ale nemusí.
3. V případě úplného uspořádání pokmy minimálního a nejmenšího prvku mno žiny splývají a stejně tak pojmy maximálního a největšího prvku.

Příklady 2.4.3:

1. Na obr.2.4.2 je pomocí Haaseho diagramu zobrazena množina všech dělit elů čísla $72=8.9=2^3.3^2$ uspořádaná relací dělitelnosti. Každý z dělitelů lze napsat ve tvaru $2^j.3^k$, kde $0 \leq j \leq 3$ a $0 \leq k \leq 2$. Je tedy X={1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72}.
   Uvažujme podmnožinu M={4,6,12,18,36} množiny X a ilustrujme pojmy zavede né v definici 2.4.3.
   - Množina M má dva minimální prvky 4 a 6 a nemá nejmenší prvek.
   - Množina M má jediný maximální prvek 36, který je současně jejím největším prvkem.
   - Dolními závorami množiny M jsou čísla 1 a 2, která do množiny M nepatří.
   - Horními závorami množiny M jsou čísla 36 a 72, z nichž prvé do množiny M patří a druhé nikoliv.
   - Infimum množiny M je prvek 2, který do množiny M nepatří.
   - Supremum množiny M je prvek 36, který do množiny M patří.
   - Infimum /supremum/ množiny M je největší společný dělitel /nej menší společný násobek/ všech čísel patřících do množiny M.
2. Na obr.2.4.3 je Haaseovým diagramem zobrazena uspořádaná množina $\langle X, \leq \rangle$, kde X={1,2,3,4,5,6,7,8,9} a $\leq$ je přirozené uspořádání přirozených čísel podle velikosti. Podmnožina M ={3,5,6,7} množiny X má za dolní závory čísla 1,2,3 a za horní závory 7, 8,9. Číslo 3 je současně minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem m nožiny M. Podobně číslo 7 je současně maximálním prvkem, největším prvke m a supremem množiny M.



Obr.2.4.2

Obr.2.4.3

3. Nechť X je množina reálných čísel přirozeně uspořádaná relací ≤ a
   nechť M je otevř. interval (1,2). Potom 1= infM ∉M, 2= supM ∉M.

Definice 2.4.4:

Uspořádanou množinu <X,≤
> nazýváme ***svazem*** /lattice/, jestliže spolu s každými dvěma prvky z X exist
uje v X jejich infimum a supremum /x,y∈X ⇒ inf{x,y},sup{x,y}∈X/.

Uspořádanou množinu <X,≤
> nazýváme ***úplným svazem***, jestliže pro každou neprázdnou podmnožinu M⊆
X existuje v X inf M a sup M.

Poznámky 2.4.4:

1.
   Každý úplný svaz je svazem, protože infimum a supremum existuje i pro
   dvouprvkové množiny.
2. Každý úplný svaz <X,≤
   > obsahuje nejmenší prvek 0 = inf X /svazová nula/ a největší prvek 1 =
   sup X /svazová jednička/, neboť X⊆X.

Příklad 2.4.4:

1.
   Množina všech dělitelů čísla 72 spolu s relací dělitelností /viz obr.
   2.4.2/ je svazem a to úplným. Infimem libovolné podmnožiny této množiny
   je největší společný dělitel všech čísel patřících do podmnožiny a supre
   mem pak jejich nejmenší společný násobek. Nulou svazu je číslo 1 a jedni
   čkou svazu číslo 72.
2. Systém všech podmnožin dané množiny A tvoří vzhledem k relaci inkluze ⊆
   úplný svaz. Nulou svazu je prázdná množina ∅
   a jedničkou svazu množina A. Infimem libovolného systému podmnožin je p
   růnik těchto podmnožin a supremem sjednocení.
3.
   Uspořádaná množina zobrazená Haaseovým digramem na obr.2.4.3 je úplmý

m svazem. Nulou svazu je číslo 1, jedničkou svazu číslo 9. Infimem libov olné podmnožiny je minimum z čísel jež do ní patří a supremem maximum.

4. Množina všech přirozených čísel je svazem vzhledem k jejich přirozenému uspořádání podle velikosti. Není však úplným svazem, neboť není pravda, že ke každé podmnožině /např. k podmnožině sudých čísel/ existuje supremum. V tomto svazu neexistuje největší prvek /jednička svazu/.

Věta 2.4.2 /o pevném bodu/**:**

Nechť $\langle X,\leq\rangle$ je úplný svaz a nechť φ je zobrazení z X do X zachovávající uspořádání, tj. s vlastností:

$$y\leq z \Rightarrow \varphi(y)\leq\varphi(z).$$

Potom existuje prvek $x\in X$ takový, že $\varphi(x)=x$.

/Zobrazení zachovávající uspořádání nazýváme ***izotonním zobrazením*** a prvek x pro který platí $\varphi(x)=x$ nazýváme ***pevným bodem zobrazení*** φ/.

Důkaz:

Označme $A=\{a\in X\colon a\leq\varphi(a)\}$. Vzhledem k tomu, že $0\leq\varphi(0)$, je $0\in A$ a tedy $A\neq\emptyset$. Protože A je neprázdnou podmnožinou úplného svazu $\langle X,\leq\rangle$, musí v X existovat supremum této množiny $s=\sup A$. Z izotonie zobrazení φ vyplývá $s\leq\varphi(s)\leq\varphi(\varphi(s))$. Tedy $s,\varphi(s)\in A$. Jelikož $s=\sup A$, musí platit $\varphi(s)\leq s$. Na druhé straně z izotonie vyplývá $s\leq\varphi(s)$. Tedy $\varphi(s)=s$, tj. prvek $\varphi(s)=s$ je pevným bodem zobrazení φ.

Definice 2.4.5:

Lexikografické uspořádání množiny X^n vytvořené uspořádáním $\leq$ množiny X je uspořádání $[\leq]$ definované takto:

$$\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle[\leq]\langle y_1,y_2,\ldots,y_n\rangle \Leftrightarrow_{def}$$
$$\Leftrightarrow_{def} (\forall i)[x_i=y_i] \vee (\exists j\leq n)[(\forall i<j)[x_i=y_i] \wedge x_j\leq y_j]]$$

Lexikografické uspořádání množiny X^* vytvořené uspořádáním $\leq$ množiny X je uspořádání $[\leq]$ definované takto:

$$\langle x_1,x_2,\ldots,x_m\rangle[\leq]\langle y_1,y_2,\ldots,y_n\rangle \Leftrightarrow_{def}$$
$$\Leftrightarrow_{def} (m\leq n \wedge (\forall i\leq m)[x_i=y_i]) \vee (\exists j\leq n)[(\forall i<j)[x_i=y_i] \wedge x_j\leq y_j]]$$

/Poznamenejme, že symbol $\leq$ je v definici použit ve dvojím smyslu: jednak jako symbol uspořádání přirozených čísel "$j\leq n$" a jednak jako symbol uspořádání množiny X "$x_j\leq y_j$"./

Poznámky 2.4.5:

1. Uspořádání množiny slov ve slovníku je lexikografické /slovníkové/ uspořádání množiny A^* všech slov nad abecedou A vytvořené uspořádáním písmen v abecedě.
2. Lexikografické uspořádání množiny X^n /resp. X^*/, vytvořené úplným uspořádáním množiny X, je úplné. Naproti tomu direktní n-tá mocnina úplného uspořádání množiny X nepředstavuje úplné uspořádání množiny X^n.