2.3. Relace typu ekvivalence

Definice 2.3.1:

Relace ρ na množině X je ***ekvivalence***, jestliže je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Třída prvku $a \in X$ v ekvivalenci ρ na množině X je množina všech těch prvků množiny X, které jsou ekvivalentní s prvkem a, tj.

$$[a]_\rho = \{x \in X:\ x \rho a\}.$$

Poznámky 2.3.1:

1. Průnik ekvivalencí je opět ekvivalence /neboť vlastnosti RE,SY,TR se přenášejí na průnik - viz věta 2.2.3/ a to největší ze všech ekvivalencí obsažených ve všech pronikaných ekvivalencích.
2. Sjednocení ekvivalencí není obecně ekvivalence. Tranzitivní uzávěr sjednocení ekvivalencí však ekvivalencí je, a to nejmenší ze všech ekvivalencí obsahujicích všechny sjednocované ekvivalence.
3. Direktní součin ekvivalencí je opět ekvivalencí /na kartézském součinu nosičů nebo na kartézské mocnině nosiče/.

Definice 2.3.2:

Systém množin $B=\{A_i:\ i \in I\}$ je ***pokrytím množiny A***, jestliže platí

$$A_i \neq \emptyset \quad \text{pro} \quad i \in I\ ,$$
$$\cup_{i \in I} A_i = A\ .$$

Platí-li navíc

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pro } i,j \in I\ , \quad i \neq j\ ,$$

pak pokrytí $B=\{A_i:\ i \in I\}$ nazýváme ***rozkladem množiny*** A. Množiny A_i nazýváme bloky /třídy/ rozkladu.

Rozklad $D=\{C_k:\ k \in K\}$ množiny A nazýváme ***zjemněním rozkladu*** $B=\{A_i:\ i \in I\}$ téže množiny A, jestliže každý blok rozkladu D je podmnožinou nějakého bloku rozkladu B.

Věta 2.3.1:

(1) ρ je ekvivalence na množině X $\Rightarrow$ $\{[x]_\rho:\ x \in X\}$ je rozklad na X.

(2) $\{X_i:\ i \in I\}$ je rozklad na X $\Rightarrow$ relace definovaná vztahem

$$x \rho y \Leftrightarrow (\exists i \in I)[x \in X_i \wedge y \in X_i]$$

je ekvivalencí na X

(3) Každá relace ekvivalence na množině X definuje rozklad množiny X a obráceně každý rozklad množiny X definuje relaci ekvivalence na množině X /mezi množinou všech ekvivalencí na dané množině a množinou všech rozkladů této množiny existuje bijekce/.

Důkaz:

(1) Musíme dokázat, že třídy $[x]_\rho$ jsou: a) neprázdné, b) pokrývají X, c) jsou disjunktní.

a) ρ je RE $\Rightarrow x \rho x \Rightarrow x \in [x]_\rho \Rightarrow [x]_\rho \neq \emptyset$

b) $X=\{x:x\in X\} \subseteq \cup_{x\in X}[x]_\rho$ a tedy $X=\cup_{x\in X}[x]_\rho$

c) $[x]_\rho\neq[y]_\rho \Rightarrow [x]_\rho\cap[y]_\rho=\emptyset$ ... dokáže se sporem

(2) Musíme dokázat, že ρ je RE,SY,TR.

RE: $x\in X \Rightarrow (\exists i\in I)[x\in X_i] \Rightarrow (\exists i\in I)[x\in X_i \wedge x\in X_i] \Rightarrow x\rho x$

sy: $x\rho y \Rightarrow (\exists i\in I)[x\in X_i \wedge y\in X_i] \Rightarrow (\exists i\in I)[y\in X_i \wedge x\in X_i] \Rightarrow y\rho x$

TR: $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow (\exists i\in I)[x\in X_i \wedge y\in X_i] \wedge (\exists k\in I)[y\in X_k \wedge z\in X_k] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists i\in I)[y\in X_i \wedge z\in X_i] \Rightarrow x\rho z$ /jestliže $y\in X_i \wedge y\in X_k$, pak $i=k$/

(3) Je slovním shrnutím tvrzení (1) a (2).

Definice 2.3.3:

Systém $\{[x]_\rho:x\in X\}$ tříd rozkladu definovaného ekvivalencí ρ označujeme symbolem X/ρ
a nazýváme ***faktorovou množinou*** množiny X podle ekvivalence ρ.

Zobrazení, které přiřazuje každému prvku $x\in X$ třídu $[x]_\rho$ do které prvek x patří, nazýváme ***přirozeným*** /***kanonickým***/ ***zobrazením*** množiny X na faktorovou množinu X/ρ. Toto zobrazení je surjekcí.

Příklady 2.3.1:

1. Nechť ρ je relace na množině I celých čísel definovaná takto:

$x\rho y \Leftrightarrow_{df}$ (rozdíl čísel x,y je dělitelný číslem m beze zytku).

Tato relaci je nazývána ***kongruence modulo m*** a je označována zápisem

$$x\equiv y(\text{mod } m).$$

Snadno ověříme, že relace $\equiv(\text{mod } m)$ /je-li hodnota modulu m předem známa, píšeme pouze $\equiv$ / je RE, SY, TR. Kongruence modulo m je tedy ekvivalencí na množině celých čísel. Faktorovou množinou, vytvořenou touto ekvivalencí, je ***systém zbytkových tříd*** modulo m označovaný zápisem

$$Z_m = I/\equiv(\text{mod } m), \quad \text{nebo stručněji } Z_m = I/\equiv .$$

Snadno ověříme, že do téže třídy patří ta celá čísla, která po vydělení modulem m dávají stejný zbytek. Zbytek nabývá hodnoty z množiny $\{0,1,2,...,m-1\}$ a existuje tedy celkem p tříd /bloků/ rozkladu.

Je-li např m=3, pak $Z_m = \{\underline{\mathbf{0}},\underline{\mathbf{1}},\underline{\mathbf{2}}\}$, kde

$\underline{\mathbf{0}}= \{...,-6,-3,0,3,6,9,...\}$

$\underline{\mathbf{1}}= \{...,-5,-2,1,4,7,10,...\}$

$\underline{\mathbf{2}}= \{...,-4,-1,2,5,8,11,...\}$

2. Nechť φ je zobrazení z X do Y. Definujme relaci ρ na X takto

$$x\rho y \Leftrightarrow_{df} \varphi(x)=\varphi(y).$$

Potom relace ρ je ekvivalencí a platí

$$\rho(x)=\varphi^{-1}(\varphi(x)).$$

Připomeňme, že $\rho(x)=\{y\in X:x\rho y\}$ Ekvivalenci ρ nazýváme ***jádrem*** /kernel/ ***zobrazení*** φ.

Např. rovnice /nebo soustavy rovnic/ x,y jsou ekvivalentní, mají-li přesně stejné množiny řešení $\varphi(x),\varphi(y)$. Ekvivalence ρ "mít stejnou množinu řešení" je jádrem zobrazení, které ke každé rovnici x přiřazuje množinu $\varphi(x)$ jejich řešení.

3. Rovnoběžnost je ekvivalence na množině všech přímek /nebo vektorů/ v rovině nebo prostoru. Množina všech směrů je faktorová množina této množiny vzhledem k relaci rovnoběžnosti.

4. Shodnost /podobnost/ je relace ekvivalence na množině všech trojúhelníků /nebo rovinných obrazců/.

Definice 2.3.4:

Ekvivalenční uzávěr relace ρ je nejmenší ekvivalence obsahující relaci ρ.

Poznámky 2.3.2:

1. Ekvivalenční uzávěr relace ρ je současně reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr relace ρ. Ekvivalenční uzávěr relace ρ je dán výrazem $(\rho^{\oplus})^{*}$.

Věta 2.3.2:

Ke každé ekvivalenci ρ na množině X existuje zobrazení φ z X do X takové, že platí:

$$\rho = \varphi \circ \varphi^{-1},$$

tj. každou ekvivalenci na X lze reprezentovat vhodným zobrazením z X do X.

Důkaz:

Nechť $X/\rho = \{X_i : i \in I\}$ je rozklad X podle ρ. Zvolme v každé třídě X_i libovolným způsobem jeden prvek x_i /***reprezentant třídy***/. Hledané zobrazení φ přiřazuje každému prvku $x \in X$ reprezentanta x_i třídy $[x]_\rho$ do které prvek x_i patří. Potom platí:

$$x\rho y \Leftrightarrow (\exists z)[x\varphi z \wedge y\varphi z] \Leftrightarrow (\exists z)[x\varphi z \wedge z\varphi^{-1}y] \Leftrightarrow x(\varphi \circ \varphi^{-1})y.$$

Věta 2.3.3:

Nechť σ je relace na množině X s následujícími dvěma vlastnostmi:

1. σ je zobrazení z X do X,
2. σ je asymetrická /a tedy i ireflexivní/.

Potom platí: relace

$$\rho = (\sigma \cup \delta) \circ (\sigma \cup \delta)^{-1}$$

je ekvivalence a je nejmenší relace s vlastnostmi 1.a 2., ze které lze relaci ρ rekonstruovat.

Důkaz:

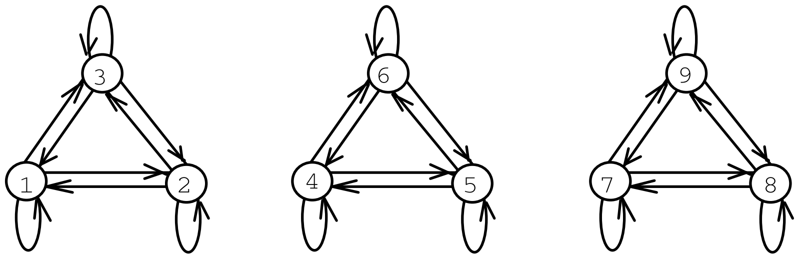
/Idea důkazu je patrna z příkladu 2.3.2./

Poznámky 2.3.3:

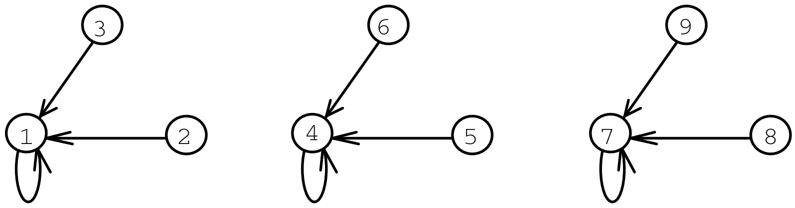
1. Ekvivalence jsou - vzhledem k vlastnosti tranzitivity - zpravidla velmi rozsáhlé relace. Proto vzniká úloha jejich úsporné reprezentace v paměti počítače. Metodu takové reprezentace nabízejí věty 2.3.2 a 2.3.3 pomocí zobrazení φ a σ - viz následující příklad 2.3.2.
2. K rekonstrukci ekvivalence z minimální relace lze využít vztahy:
   - $\rho = (\sigma \cup \delta) \circ (\sigma \cup \delta)^{-1}$
   - $\rho = (\sigma^{\oplus})^{*}$

Příklad 2.3.2:

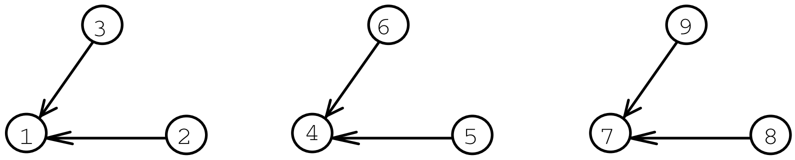
Uvažujme ekvivalenci ρ na množině {1,2,3,4,5,6,7,8,9} definovanou rozkladem {{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}} této množiny. Na obr.2.3.1 jsou zobrazeny relace ρ, φ, σ. Za reprezentanty tříd byly zvoleny prvky 1, 4, 7. Relace ρ obsahuje 27 prvků, relace φ 9 a relace σ 6 prvků.



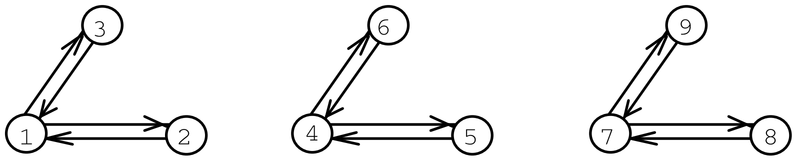
Obr.2.3.1.a - ρ



Obr.2.3.1.b - φ



Obr.2.3.1.c - σ



Obr.2.3.1.d - $\sigma^{\oplus}$