2.2. Homogenní binární relace

Definice 2.2.1:

Binární relace v** /**na**/ **množině X je podmnožina ρ druhé kartézské mocniny množiny X, tj.

$$\rho \subseteq X \times X, \text{ neboli } \rho \subseteq X^2.$$

Poznámky 2.2.1:

1. Tématem této kapitoly je relační systém $\langle\{X\},\{\rho\}\rangle$, neboli, zjednodušeně zapsáno, $\langle X,\rho\rangle$. Jelikož předpokládáme implicitní zadání nosiče X, hovoříme pouze o relaci ρ.

2. Homogenní binární relace /tj. binární relace na množině/ je speciálním případem obecné korespondence /heterogenní binární relace/ a platí tedy o ní vše, co o korespondenci. Definice operací inverze a kompozice a vlastnosti těchto operací se přenášejí beze změny.

3. Každou nehomogenní binární relaci $\langle X,Y,\rho\rangle$ lze převést na homogenní binární relaci $\langle Z,Z,\sigma\rangle$ takto:
   $$Z=X\cup Y,\ (\forall x,y\in Z)[x\sigma y \Leftrightarrow x\in X \wedge y\in Y \wedge x\rho y]$$
   /Příklad: X,Y,Z jsou po řadě množinami žen, mužů, lidí a ρ,σ relacemi "x je manželka y"/

4. Triviální binární relace na množině X:
   - $\omega=\emptyset$ .... prázdná relace
   - $\iota=X\times X=X^2$ .... úplná relace
   - $\delta=\{\langle x,x\rangle : x\in X\}$ ... identická /diagonální/ relace

   Pro všechny relace ρ platí:
   - $\delta\circ\rho = \rho\circ\delta = \rho$
   - $\omega\circ\rho = \rho\circ\omega = \omega$

5. Booleovské operace s binárními relacemi:
   - $x(\rho\cup\sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \vee x\sigma y$
   - $x(\rho\cap\sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \wedge x\sigma y$
   - $x\rho' y \Leftrightarrow \neg x\rho y$

6. Binární relace na konečné množině lze reprezentovat orientovanými grafy podle následujícího pravidla:
   $$x\rho y \Leftrightarrow \text{(z uzlu x do uzlu y vede orientovaná hrana).}$$
   Teorii orientovaných grafů lze považovat za teorii konečných binárních relací, teorii neorientovaných grafů za teorii konečných symetrických binárních relací /homogenních/.

Věta 2.2.1:

Nechť ρ,σ,τ jsou libovolné binární relace na téže množině X. Potom platí:

(1) $(\rho\cup\sigma)\circ\tau = (\rho\circ\tau)\cup(\sigma\circ\tau)$

(2) $\rho\circ(\sigma\cup\tau) = (\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)$

(3) $(\rho\cap\sigma)\circ\tau = (\rho\circ\tau)\cap(\sigma\circ\tau)$

(4) $\rho\circ(\sigma\cap\tau) = (\rho\circ\sigma)\cap(\rho\circ\tau)$
(5) $(\rho\cup\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\cup\sigma^{-1}$
(6) $(\rho\cap\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\cap\sigma^{-1}$
(7) $(\rho\circ\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$
(8) $\rho\subseteq\sigma \Rightarrow (\rho\circ\tau)\subseteq(\sigma\circ\tau)$
(9) $\rho\subseteq\sigma \Rightarrow (\tau\circ\rho)\subseteq(\tau\circ\sigma)$

Důkazy /ukázky/**:**

(2)	1. $x(\rho\circ(\sigma\cup\tau))y$	levá strana
	2. $(\exists z)[x\rho z \wedge z(\sigma\cup\tau)y]$	definice $\circ$: 1
	3. $(\exists z)[x\rho z \wedge (z\sigma y \vee z\tau y)]$	definice $\cup$: 2
	4. $(\exists z)[(x\rho z \wedge z\sigma y) \vee (x\rho z \wedge z\tau y)]$	$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow p\wedge q\vee p\wedge r$: 3
	5. $(\exists z)[x\rho z \wedge z\sigma y] \vee (\exists z)[x\rho z \wedge z\tau y]$	$\exists z[p\vee q]\Rightarrow\exists zp\vee\exists zq$: 4
	6. $x(\rho\circ\sigma)y \vee x(\rho\circ\tau)y$	definice $\circ$: 5
	7. $x((\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau))y$	definice $\cup$:6, pravá strana
(7)	1. $x(\rho\circ\sigma)^{-1}y$	levá strana
	2. $y(\rho\circ\sigma)x$	definice $^{-1}$: 1
	3. $(\exists z)[y\rho z \wedge z\sigma x]$	definice $\circ$: 2
	4. $(\exists z)[z\rho^{-1}y \wedge x\sigma^{-1}z]$	definice $^{-1}$: 3
	5. $(\exists z)[x\sigma^{-1}z \wedge z\rho^{-1}y]$	$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$: 4
	6. $x(\sigma^{-1}\circ\rho^{-1})y$	definice $\circ$:5, pravá strana
(9)	1. $\rho\subseteq\sigma$	předpoklad
	2. $x\rho y\Rightarrow x\sigma y$	přepis: 1
	3. $x(\tau\circ\rho)y$	předpoklad
	4. $(\exists z)[x\tau z \wedge z\rho y]$	definice $\circ$: 3
	5. $(\exists z)[x\tau z \wedge z\sigma y]$	$(p\Rightarrow r)\Rightarrow(q\wedge p\Rightarrow q\wedge r)$: 2,4
	6. $x(\tau\circ\sigma)y$	definice $\circ$: 5

Definice 2.2.2:

Celočíselná mocnina binární relace ρ
je definována /pomocí diagonální relace, operace kompozice a operace inverze/ induktivně takto:

- $\rho^0=\delta$
- $\rho^k=\rho\circ\rho^{k-1}$, $k=1,2,\dots$
- $\rho^{-k}=(\rho^k)^{-1}$

Poznámky 2.2.2:

1. Je-li relace ρ na konečné množině zobrazena orientovaným grafem /jeho diagramem/, pak:
   - $x\rho^k y$ značí, že existuje orientovaná cesta délky k z uzlu x do uzlu y,
   - $x\rho^{-k}y$ značí, že existuje orientovaná cesta délky k z uzlu y do uzlu x.

2. Příklad: Nechť $x\rho y$ značí "x je rodič y" Potom:
   - $x\rho^2 y$ .... značí "x je prarodič y"
   - $x\rho^3 y$ .... značí "x je praprarodič y"
   - $x\rho^{-1}y$ .... značí "x je dítě y"
   - $x\rho^{-2}y$ .... značí "x je potomek v 2.pokolení y"

Definice 2.2.3:

Direktní součin relací ρ a σ definovaných na množině X je relace $\rho\otimes\sigma$ definovaná na množině $X^2=X\times X$ takto:

$$\langle x_1,x_2\rangle(\rho\otimes\sigma)\langle y_1,y_2\rangle \Leftrightarrow x_1\rho y_1 \wedge x_2\sigma y_2.$$

Obecněji ***direktní součin*** n ***relací*** $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ definovaných na množině X je relace $\rho_1\otimes\rho_2\otimes...\otimes\rho_n$ definovaná na množině $X^n=X\times X\times...\times X$ takto:

$$\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle(\rho_1\otimes\rho_2\otimes...\otimes\rho_n)\langle y_1,y_2,...,y_n\rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1\rho_1 y_1 \wedge x_2\rho_2 y_2\wedge...\wedge x_n\rho_n y_n$$

Je-li speciálně $\rho_1=\rho_2=...=\rho_n=\rho$, pak hovoříme o n-***té direktní mocnině relace*** ρ.

Poznámky 2.2.3:

1. Zatímco množinové operace /sjednocení, průnik, komplement, rozdíl, symetrický rozdíl,.../ a operace kompozice a inverze /a z nich odvozená operace mocniny/ s binárními operacemi na množině X vedou opět k binárním relacím na téže množině X, operace direktního součinu /a direktní mocniny/ vedou k operacím s novým nosičem: místo nosiče X má nová relace nosič $X^n=X\times X\times...\times X$.

2. Příklad: Je-li nosičem množina reálných čísel a označují-li symboly =, < relace rovnosti a uspořádání na této množině, pak n-té direktní mocniny těchto relací jsou relace rovnosti a uspořádání /částečného/ na množině všech n-rozměrných reálných vektorů.

Definice 2.2.4:

Binární relace ρ na množině X se nazývá ..., jestliže pro všechna $x,y,z\in X$ platí:

- ***reflexivní*** /RE/: $x\rho x$
- ***ireflexivní*** /IR/: $\neg x\rho x$
- ***symetrická*** /SY/: $x\rho y \Rightarrow y\rho x$
- ***asymetrická*** /AS/: $x\rho y \Rightarrow \neg y\rho x$
- ***antisymetrická*** /AN/: $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x=y$
- ***tranzitivní*** /TR/: $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
- ***souvislá*** /SO/: $x\rho y \vee y\rho x \vee x=y$
- ***univalentní*** /FU/: $x\rho y \wedge x\rho z \Rightarrow y=z$

Poznámky 2.2.4:

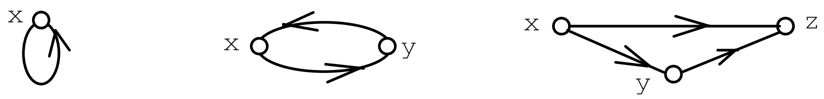
1. Binární relace, se kterými se v praxi nejčastěji setkáváme, jsou většinou charakterizovány určitou kombinací výše uvedených tzv. ***základních vlastností***. Tak např. ***relace typu ekvivalence*** je relace, která je současně RE,SY,TR, nebo ***relace typu uspořádání*** /částečného, neostrého/ je relace, která je současně RE,AN,TR. Relace s vlastnostmi RE,TR se nazývá ***kvaziuspořádáním*** nebo ***tolerancí*** či ***předuspořádáním /preorder/***.

2. Základní vlastnosti binárních relací byly definovany formulemi predikátové logiky. Rovnocenným způsobem lze je také definovat pomocí množinových vztahů:

- ***reflexivita*** /RE/: $\delta\subseteq\rho$, nebo $\delta\cup\rho=\rho$, nebo $\delta\cap\rho=\delta$
- ***ireflexivita*** /IR/: $\rho\subseteq\delta'$, nebo $\rho\cup\delta'=\delta'$, nebo $\rho\cap\delta'=\rho$
- ***symetrie*** /SY/: $\rho=\rho^{-1}$
- ***asymetrie*** /AS/: $\rho\cap\rho^{-1}=\omega$
- ***antisymetrie*** /AN/: $\rho\cap\rho^{-1}=\delta$

- ***tranzitivita*** /TR/: $\rho\circ\rho\subseteq\rho$
- ***souvislost*** /SO/: $\rho\cup\rho^{-1}\cup\delta=\iota$

3.
Na obr.2.2.1 jsou zobrazeny základní vlastnosti RE,SY,TR pomocí grafových diagramů.



Reflexivita Symetrie Tranzitivita

Obr.2.2.1. Základní vlastnosti homogenních binárních relací

4. Základní vlastnosti vyjmenované v definici 2.2.4 nejsou nezávislé jak ukazuje následující věta 2.2.2. Ne všechny kombinace základních vlastností jsou tedy možné.

Věta 2.2.2:

(1) Relace ρ je asymetrická $\Rightarrow$ relace ρ je ireflexivní.
(2) Relace ρ je asymetrická $\Rightarrow$ relace ρ je antisymetrická.
(3) Relace ρ je souvislá $\Rightarrow$ relace ρ' je antisymetrická.

Důkaz:

Ad (1): 1. $x\rho y \Rightarrow \neg y\rho x$ předpoklad /asymetrie/
2. $x\rho x \Rightarrow \neg x\rho x$ substituce y/x: 1
3. $\neg x\rho x$ jinak by 2. neplatilo /ireflexivita/

Ad (2): 1. $x\rho y \Rightarrow \neg y\rho x$ předpoklad /asymetrie/
2. $\neg x\rho y \vee \neg y\rho x$ VI: 1
3. $\neg(x\rho y \wedge y\rho x)$ de Morgan: 2
4. $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x=y$ neboť $x\rho y \wedge y\rho x$ neplatí - 3 /antisym./

Ad (3): 1. $x\rho y \vee y\rho x \vee x=y$ předpoklad /souvislost/
2. $\neg(x\rho y \vee y\rho x) \Rightarrow x=y$ ZI: 1
3. $\neg x\rho y \wedge \neg y\rho x \Rightarrow x=y$ De Morgan: 2
4. $x\rho' y \wedge y\rho' x \Rightarrow x=y$ definice ': 3 /antisymetrie ρ'/

Věta 2.2.3:

Pro všechny zákl. vlastnosti RE,IR,SY,AS,AN,TR,SO homogenních binárních relací platí:

(1) Vlastnosti jsou ***dědičné***, tj.jejich platnost se přenáší z dané relace na každé její zúžení.
(2) Má-li relace danou vlastnost, pak ji má i relace k ní inverzní.
(3) Mají-li dvě relace určitou vlastnost, pak tuto vlastnost má i jejich průnik.

Důkaz:

Ad (1): Proměnné v definičních formulích základních vlastností /definice 2.2.4/ jsou všechny obecně kvantifikovány. Formule musí proto zůstat v platnosti i při libovolném zúžení relace. Dědičnými proto např. nejsou negace základních vlastností, např. vlastnost relace nebýt reflexivní, nebýt symetrickou a pod.

Ad (2): Důkaz tvrzení např. pro vlastnost tranzitivity:
1. $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
2. $y\rho^{-1}x \wedge z\rho^{-1}y \Rightarrow z\rho^{-1}x$
3. $z\rho^{-1}y \wedge y\rho^{-1}x \Rightarrow z\rho^{-1}x$

Ad (3): Důkaz tvrzení např. pro vlastnost symetrie:
1. $(x\rho y \Rightarrow y\rho x) \wedge (x\sigma y \Rightarrow y\sigma x)$
2. $(x\rho y \wedge x\sigma y) \Rightarrow (y\rho x \wedge y\sigma x)$
3. $x(\rho\cap\sigma)y \Rightarrow y(\rho\cap\sigma)x$

Definice 2.2.5:

Uzávěr relace je nejmenší nadrelace této relace, která má určitou vla stnost charakteristickou pro daný druh uzávěru..

Reflexivní uzávěr relace ρ je nejmenší relace, která relaci ρ obsahuje a současně je reflexivní. Tento uzávěr označíme ρ''.

Symetrický uzávěr /symetrizace/ relace ρ je nejmenší relace, která relaci ρ obsahuje a současně je symetrická. Tento uzávěr označíme $\rho^{\oplus}$.

Tranzitivní uzávěr relace ρ je nejmenší relace, která relaci ρ obsahuje a současně je tranzitivní. Tento uzávěr označíme ρ^{+}.

Reflexivně-tranzitivní uzávěr relace ρ je nejmenší relace, která relaci ρ obsahuje a současně je reflexivní i tranzitivní. Tento uzávěr označíme ρ^{*}.

Věta 2.2.4:

(1) Reflexivní uzávěr lze vyjádřit ve tvaru: $\rho''=\rho\cup\delta$
(2) Symetrický uzávěr lze vyjádřit ve tvaru: $\rho^{\oplus}=\rho\cup\rho^{-1}$
(3) Tranzitivní uzávěr lze vyjádřit ve tvaru: $\rho^{+}=\rho\cup\rho^{2}\cup\rho^{3}\cup\ldots$
(4) Refl.-tranzit. uzávěr lze vyjádřit ve tvaru: $\rho^{*}=\delta\cup\rho\cup\rho^{2}\cup\rho^{3}\cup\ldots$

Důkaz:

Ad (1): Triviální - vyplývá ihned z definice.

Ad (2): Třeba dokázat: a) ρ je obsažena v $\rho^{\oplus}$, b) $\rho^{\oplus}$ je symetrická, c) $\rho^{\oplus}$ je nejmenší relace s oběma vlastnostmi a),b).

a) Z $\rho^{\oplus}=\rho\cup\rho^{-1}$ vyplývá $\rho\subseteq\rho^{\oplus}$.

b) Důkazem je následující řetězec rovností:
$x\rho^{\oplus}y=x(\rho\cup\rho^{-1})y=x\rho y\vee x\rho^{-1}y=y\rho x\vee y\rho^{-1}x=y(\rho\cup\rho^{-1})x=y\rho^{\oplus}x$.

c) Nechť σ je libovolná symetrická relace obsahující relaci ρ, tj. $\rho\subseteq\sigma$ a $\sigma=\sigma^{-1}$. Máme dokázat $\rho^{\oplus}\subseteq\sigma$. Důkazem je následující řetězec vztahů:

$$\rho^{\oplus}=\rho\cup\rho^{-1}\subseteq\sigma\cup\sigma^{-1}=\sigma\cup\sigma=\sigma$$

/neboť je-li $\rho\subseteq\sigma$, je také $\rho^{-1}\subseteq\sigma^{-1}$/.

Ad (3): Třeba dokázat a),b),c) podobně jako v předchozím bodě.

a) $\rho\subseteq\rho^{+}$

b) $x\rho^{+}y\wedge y\rho^{+}z \Rightarrow x\rho^{m}y\wedge y\rho^{n}z \Rightarrow x(\rho^{m}\circ\rho^{n})z \Rightarrow x\rho^{m+n}y \Rightarrow x\rho^{+}z$

c) Nechť σ je libovolná tranzitivní relace obsahující relaci ρ, Máme dokázat $\rho^{+}\subseteq\sigma$. Důkazem je následující řetězec inkluzí a rovností:

$$\rho^{+}=\rho\cup\rho^{2}\cup\rho^{3}\cup\ldots \subseteq \sigma\cup\sigma^{2}\cup\sigma^{3}\cup\ldots \subseteq \sigma\cup\sigma\cup\sigma\cup\ldots =\sigma$$

Ad (4): Vyplývá ihned z (1) a (3).

Poznámky 2.2.5:

1. Je-li relace ρ na konečné množině zobrazena orientovaným grafem /jeho diagramem/, pak:

(1) Diagram reflexivního uzávěru ρ" vznikne z diagramu relace ρ tak, že ke každému uzlu přidáme smyčku /hranu vedoucí do téhož uzlu/, pokud tato smyčka již v grafu neexistuje.

(2) Diagram relace symetrického uzávěru $\rho^{\oplus}$ vznikne z diagramu relace ρ tak, že ke každé hraně připojíme opačně orientovanou hranu - pokud již v diagramu neexistuje.

(3) Diagram tranzitivního uzávěru ρ^{+} získáme z diagramu relace ρ tak, že diagram obohatíme o hrany spojující každý uzel se všemi uzly, které jsou z něho dosažitelné.

(4) Diagram reflexivně-tranzitivního uzávěru ρ^{*} vznikne z diagramu tranzitivního uzávěru ρ^{+} doplněním diagramu o elementární smyčky ke každému uzlu u kterého neexistují.

2. Příklad. Je-li ρ relace "býti rodičem", pak tranzitivní uzávěr ρ^{+} je relací "býti předkem". Je-li ρ relace "býti dítětem", pak tranzitivní uzávěr ρ^{+} je relací "býti potomkem".