2. Relační systémy

2.1. Korespondence a zobrazení

Definice 2.1.1:

Korespondence množiny X ***do množiny*** Y je relační systém $\langle\{X,Y\},\{\rho\}\rangle$, se dvěma nosiči - množinami X,Y - a jednou obecnou binární relací $\rho\subseteq X\times Y$. Nosič X nazýváme levým oborem relace ρ a nosič Y pravým oborem.

Místo zápisu $\langle\{X,Y\},\{\rho\}\rangle$ budeme většinou užívat zjednodušený zápis $\langle X,Y,\rho\rangle$ a je-li speciálně X=Y /relace ρ je homogenní/, pak místo zápisu $\langle\{X\},\{\rho\}\rangle$ zápis $\langle X,\rho\rangle$. Považujeme-li nosiče za implicitně dané, pak korespondencí budeme nazývat přímo relací ρ.

Poznámky 2.1.1:

1. Skutečnost, že $\langle x,y\rangle\in\rho$ /množinový zápis/ lze stručněji zapsat takto:
   - ρxy ... prefixový zápis /někdy také $\rho(x,y)$/
   - $xy\rho$ ... postfixový zápis
   - $x\rho y$ ... infixový zápis /nejčastěji používaný tvar/

2. Další terminologie a notace:
   - $D(\rho)=\{x\in X: (\exists y\in Y)[x\rho y]\}$ ... definiční obor korespondence ρ /domain/
   - $R(\rho)=\{y\in Y: (\exists x\in X)[x\rho y]\}$ ... obor hodnot korespondence ρ /range/
   - $\rho(A)=\{y\in Y: (\exists x\in A)[x\rho y]\}$ ... obraz množiny $A\subseteq X$ v korespondenci ρ
   - $\rho^{-1}(B)=\{x\in X: (\exists y\in B)[x\rho y]\}$ ... vzor množiny $B\subseteq Y$ v korespondenci ρ
   - $\rho(a)=\{y\in Y: a\rho y\}$ ... obraz prvku $a\in X$ v korespondenci ρ
   - $\rho^{-1}(b)=\{x\in X: x\rho b\}$ ... vzor prvku $b\in Y$ v korespondenci ρ
   - $\rho\cap A\times B$ ... zúžení /restrikce/ korespondence ρ na $A\times B$ /$A\subseteq X$, $B\subseteq Y$/

Příklady 2.1.1:

- člověk x je akcionářem podniku y,
- anglické slovo x má aspoň jeden společný význam s českým slovem y,
- člověk x je sourozenec člověka y,
- čísla x,y jsou ve vztahu $x^2+y^2<1$.

Definice 2.1.2:

Korespondence $\langle X,Y,\rho\rangle$, $\langle Y,X,\sigma\rangle$ jsou ***navzájem inverzní***, jestliže platí:

$$(\forall x\in X)(\forall y\in Y)[x\rho y \Leftrightarrow y\sigma x].$$

Skutečnost, že relace ρ,σ jsou navzájem inverzní označujeme zápisem:

$$\rho=\sigma^{-1},\ \sigma=\rho^{-1}.$$

Poznámky 2.1.2:

V případě konečných relací můžeme relaci reprezentovat booleovskou maticí. Matice reprezentující inverzní relaci je potom transponovanou maticí k matici reprezentující původní relaci. Inverzní relaci nazýváme proto také transponovanou relací k původní relaci.

Příklady 2.1.2:

- inverzní relací k relaci "předmět x patří člověku y" je relace "člověk y vlastní předmět x",
- inverzní relací k relaci "x je rodičem y" je relace "y je dítětem x",
- inverzní relací k relaci "x je sourozencem y" je relace "y je sourozencem x",

Definice 2.1.3:

Korespondence $\langle X,Z,\tau\rangle$ je ***kompozicí*** /součinem, složením/ korespondencí $\langle X,Y,\rho\rangle$ a $\langle Y,Z,\sigma\rangle$ /v tomto pořadí/, jestliže platí:

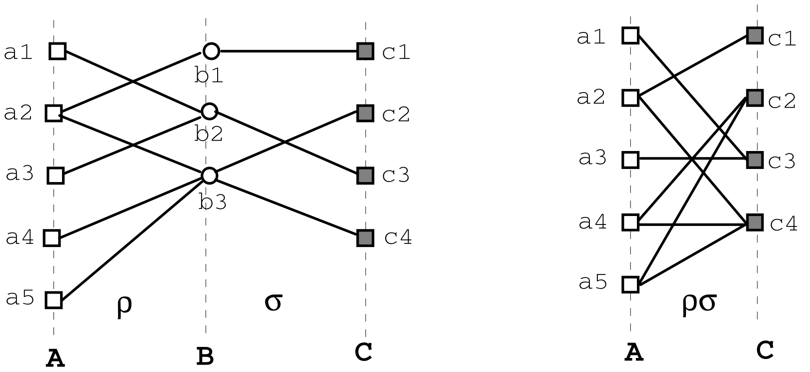
$$(\forall x\in X)(\forall z\in Z)[x\tau z \Leftrightarrow (\exists y\in Y)[x\rho y \wedge y\sigma z]].$$

Skutečnost, že korespondence τ je kompozicí korespondencí ρ a σ zapisujeme takto:

$$\tau = \rho\circ\sigma, \text{ nebo } \tau = \rho.\sigma, \text{ nebo } \tau = \rho\sigma$$

Poznámky 2.1.3:

1. Na obr. 2.1.1 je ilustrován pojem kompozice korespondencí $\langle A,B,\rho\rangle$ a $\langle B,C,\sigma\rangle$



Obr.2.1.1. Kompozice relací $\langle A,B,\rho\rangle$ a $\langle B,C,\sigma\rangle$.

Příklady 2.1.3:

- kompozicí relací "x je bratrem y" a "y je rodičem z" je relace "x je strýcem z",
- kompozicí relací "x žije ve městě y" a "město y se nachází v zemi z" je relace "x žije v zemi z".

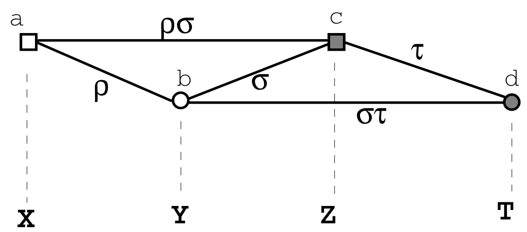
Věta 2.1.1:

Kompozice /součin/ korespondencí /obecných binárních relací/ je asociativní, tj. pro relace $\langle X,Y,\rho\rangle$, $\langle Y,Z,\sigma\rangle$, $\langle Z,T,\tau\rangle$ platí:

$$(\rho\circ\sigma)\circ\tau = \rho\circ(\sigma\circ\tau).$$

Důkaz:

Idea důkazu je ilustrována grafovým diagramem na obrázku 2.1.2.



Obr.2.1.2. Asociativita kompozice relací $\langle A,B,\rho\rangle,\langle B,C,\sigma\rangle.\langle C,D,\tau\rangle$

Formálním důkazem je následující řetěz navzájem ekvivalentních tvrzení:

1. $x((\rho\circ\sigma)\circ\tau)t$
2. $(\exists z\in Z)[x(\rho\circ\sigma)z \wedge z\tau t]$
3. $(\exists z\in Z)[(\exists y\in Y)[x\rho y \wedge y\sigma z] \wedge z\tau t]$
4. $(\exists z\in Z)(\exists y\in Y)[x\rho y \wedge y\sigma z \wedge z\tau t]$
5. $(\exists y\in Y)[[x\rho y \wedge (\exists z\in Z)[y\sigma z \wedge z\tau t]]$
6. $(\exists y\in Y)[[x\rho y \wedge y(\sigma\circ\tau)t]]$
7. $x(\rho\circ(\sigma\circ\tau))t$

Věta 2.1.2:

Pro inverzi kompozice, sjednocení, průniku a komplementu binárních relac í platí /nosiče relací musí být takové, aby operace mezi relacemi byly provedi telné/:

1. $(\rho\circ\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$
2. $(\rho\cup\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\cup\sigma^{-1}$
3. $(\rho\cap\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\cap\sigma^{-1}$
4. $(\rho')^{-1} = (\rho^{-1})'$

Důkaz:

Ad 1: 1. $x(\rho\circ\sigma)^{-1}y$
2. $y(\rho\circ\sigma)x$
3. $(\exists z\in Z)[y\rho z \wedge z\sigma x]$
4. $(\exists z\in Z)[z\rho^{-1}y \wedge x\sigma^{-1}z]$
5. $(\exists z\in Z)[x\sigma^{-1}z \wedge z\rho^{-1}y]$
6. $x(\sigma^{-1}\circ\rho^{-1})y$

Ad 2: 1. $x(\rho\cup\sigma)^{-1}y$
2. $y(\rho\cup\sigma)x$
3. $y\rho x \vee y\sigma x$
4. $x\rho^{-1}y \vee x\sigma^{-1}y$
5. $x(\rho^{-1}\cup\sigma^{-1})y$

Ad 3,4: obdobně

Definice 2.1.4:

Korespondence $\langle X,Y,\varphi$
$\rangle$ je ***zobrazení*** /z množiny X do množiny Y/, jestliže platí:

$$(\forall x\in X)(\forall y_1,y_2\in Y)[x\varphi y_1 \wedge x\varphi y_2 \Rightarrow y_1=y_2].$$

Poznámky 2.1.4:

1. Je-li φ zobrazení, pak ke každému $x\in X$ existuje nejvýše jedno $y\in$
   Y takové, že $x\varphi y$. Vedle množinového zápisu $\langle x,y\rangle\in\varphi$ a relačního zápisu $x\varphi$
   y, užíváme proto nejčastěji funkční zápis $y=\varphi(x)$.

2. Další terminologie a notace:
   - $D(\varphi)=\{x\in X: (\exists y\in Y)[y=\varphi(x)]\}$ ... defin.obor zobrazení φ /domain/
   - $R(\varphi)=\{y\in Y: (\exists x\in X)[y=\varphi(x)]\}$ ... obor hodnot zobrazení φ /range/
   - $D(\varphi)\subseteq X$ ... φ je ***částečné zobrazení z*** X ***do*** Y
   - $D(\varphi)=X$ ... φ je ***úplné zobrazení*** X ***do*** Y
   - $R(\varphi)\subseteq Y$ ... φ je ***zobrazení z*** X ***do*** Y
   - $R(\varphi)=Y$ ... φ je ***zobrazení z*** X ***na*** Y

3. Nechť $\langle X,Y,\varphi\rangle$ je zobrazení a $A\subseteq X$. Potom zobrazení $\langle X,Y,\varphi\cap A\times Y\rangle$ se nazývá ***zúžením /restrikcí/ zobrazení*** φ ***na množinu*** A.

Příklady 2.1.4:

- Zobrazení y=tg(x) je částečné zobrazení z R do R,
- Zobrazení y=sin(x) je úplné zobrazení z R do R,
- Zobrazení y=abs(log(x)) je zobrazení z R do R,
- Zobrazení y=log(x) je zobrazení z R na R.

Věta 2.1.3:

Nechť φ,ψ jsou zobrazení. Potom platí:

$$\varphi=\psi \iff D(\varphi)=D(\psi) \wedge (\forall x\in D(\varphi))[\varphi(x)=\psi(x)].$$

Důkaz:

Triviální. Tvrzení vyplývá ihned z definice.

Věta 2.1.4:

Kompozice /součin/ zobrazení je opět zobrazení, tj. jsou-li relace $\langle X,Y,\varphi\rangle$, $\langle Y,Z,\psi\rangle$ zobrazeními /funkcemi/, pak i složená relace $\langle X,Z,\varphi\circ\psi\rangle$ je zobrazením /funkcí/.

Důkaz:

Zobrazení je korespondence a kompozice korespondencí je opět korespondence. Zobrazení φ přiřazuje ke každému $x\in X$ nejvýše jedno $y\in Y$ a zobrazení ψ přiřazuje ke každému $y\in Y$ nejvýše jedno $z\in Z$. Tedy korespondence $\varphi\circ\psi$ přiřazuje ke každému $x\in X$ nejvýše jedno $z\in Z$ a tedy je zobrazením.

Poznámky 2.1.5:

1. Vedle zápisu $x(\varphi\circ\psi)z$ používáme také zápis $z=(\varphi\circ\psi)(x)$ nebo nejčastěji zápis $z=\psi(\varphi(x))$.

2. Inverzní relace k zobrazení nemusí být zobrazením.

Definice 2.1.5:

Zobrazení $\langle X,Y,\varphi\rangle$ /tj. zobrazení z množiny X do množiny Y/ se nazývá:

- ***surjektivní*** /je surjekcí, je zobrazením na/, jestliže

$$(\forall y\in Y)(\exists x\in X)[y=\varphi(x)]$$

- ***injektivní*** /je injekcí, je prostým zobrazením/, jestliže

$$(\forall x,x'\in X)[x\neq x' \Rightarrow \varphi(x)\neq\varphi(x')]$$

- ***bijektivní*** /je bijekcí, je vzájemně jednoznačným zobrazením/, jestliže je současně injektivní i surjektivní.

Příklady 2.1.5:

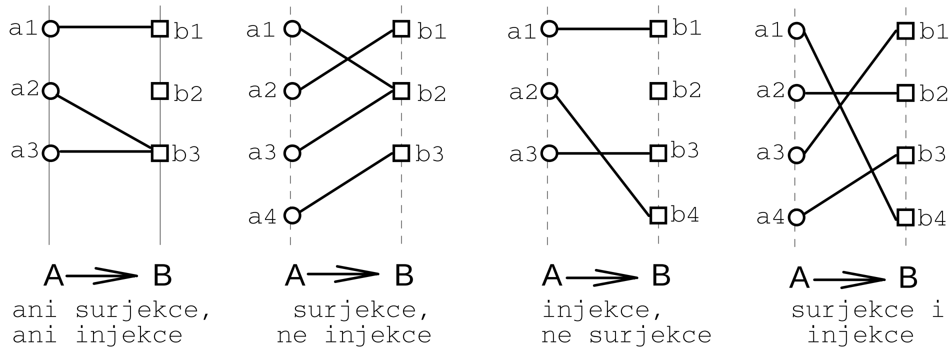
1. Permutace je bijektivní zobrazení konečné množiny do sebe. jiným příkladem bijekce je identické zobrazení libovolné množiny dna sebe:

$$(\forall x \in X)[\varphi(x)=x].$$

2. Zobrazení φ z množiny X do množiny Y, která je nadmnožinou množiny X, definované vztahem $\varphi(x)=x$ je injekcí. Inkluzi lze chápat jako zúžení identického zobrazení.

3. Zobrazení φ z množiny $X \times Y$ do množiny X definované vztahem $\varphi(\langle x,y\rangle)=x$ se nazývá první projekcí. Obdobně zobrazení ψ z množiny $X \times Y$ do množiny Y definované vztahem $\psi(\langle x,y\rangle)=y$ se nazývá druhou projekcí. Obě projekce jsou příkladem surjekce.

4. Na obr.2.1.3 jsou zobrazeny příklady surjekcí a injekcí.



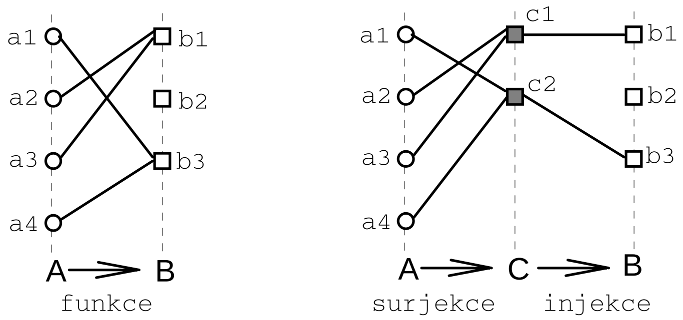
Obr.2.1.3. Surjektivní a injektivní zobrazení

Věta 2.1.5:

Každou funkci φ lze vyjádřit jako kompozici surjekce a injekce, tj. $\varphi(x)=\chi(\psi(x))$, kde ψ je surjekce a χ je injekce.

Důkaz:

Idea důkazu je ilustrována na obr.2.1.4. Je-li φ zobrazení z A do B, pak ψ definujeme jako zobrazení z A do C, kde $C=\{C_1,C_2,...\}$ je systém podmnožin množiny A takový, že $a,a' \in C_i \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(a')$. Funkce ψ je pak zajisté surjekcí a funkce χ zobrazující C do B injekcí.



Obr 2.1.4. Funkci lze vyjádřit jako součin surjekce a injekce

Věta 2.1.6:

Nechť φ je zobrazení konečné množiny X do sebe. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- φ je surjektivní,
- φ je injektivní,
- φ je bijektivní.

Důkaz:

Vzhledem k definici bijekce postačí dokázat:

$$\varphi \text{ je surjekce} \Leftrightarrow \varphi \text{ je injekce.}$$

Pravdivost tvrzení se snadno nahlédne /a důkaz zkonstruuje/ na základě obr.2.1.3.

Definice 2.1.6:

Dvě množiny A,B nazýváme ***ekvipotentními*** /majícími stejnou ***mohutnost*** neboli ***kardinalitu***/ a píšeme A~B, jestliže existuje bijekce množiny A na množinu B.

Množina A se nazývá ***spočetná***, je-li ekvipotentní s množinou přirozených čísel. Množina, která je konečná nebo spočetná se nazývá ***nejvýše spočetná***. Nekonečná množina, která není spočetná se nazývá ***nespočetná***.

Mohutnost systému všech podmnožin spočetné množiny /neboli: mohutnost všech podmnožin množiny přirozených čísel/ se nazývá ***mohutnost kontinua***.

Mohutnost /kardinalitu, kardinální číslo/ množiny A označujeme zápisem: card(A)

Poznámky 2.1.5:

1. Zřejmě platí:
   - A~A
   - A~B ⇒ B~A
   - A~B ∧ B~C ⇒ A~C
   - card(A)=n ⇔ A~{1,2,...,n}

2. Pro dvě množiny A,B jsou logicky možné následující čtyři případy:
   (1) Mezi oběma množinami existuje bijekce.
   (2) Existuje bijekce mezi jednou množinou a vlastní podmnožinou druhé množiny a přitom neexistuje bijekce mezi druhou množinou a vlastní podmnožinou prvé množiny.

(3)
Existuje bijekce mezi množiniou A a vlastní podmnožinou množiny B a současně bijekce mezi množinou B a vlastní podmnožinou množiny A.

(4)
Neexistuje bijekce ani mezi A a vlastní podmnožinou množiny B, ani mezi B a vlastní podmnožinou množiny A.

Pro konečné množiny jsou možné pouze prvé dvě alternativy. Třetí případ může nastat pouze pro nekonečné množiny. Čtvrtý případ je vyloučen i pro nek onečné množiny.

Následující věta 2.1.7 ukazuje, že třetí případ se redukuje na prvý, tak že i pro nekonečné množiny mohou nastat pouze prvé dva případy.

Věta 2.1.7 /Cantor - Bernstein/**:**
Je-li každá ze dvou množin ekvipotentní s vlastní podmnožinou druhé množ iny, pak jsou tyto množiny ekvipotentní také navzájem.

Věta 2.1.8 /několik vybraných tvrzení o nekonečných množinách/**:**

1) Každá podmnožina nejvýše spočetné množiny je nejvýše spočetná množina.

2) Sjednocení /nejvýše/ spočetně mnoha /nejvýše/ spočetných množin je /nejv ýše/ spočetná množina.

3) Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu a to takovou, že j ejí komplement je nekonečný.

4) Každá nekonečná množina obsahuje vlastní podmnožinu, která je s ní ekvip otentní /tuto vlastnost konečné množiny nemají/.

5) Množina racionálních čísel je spočetná.

6) Systém všech podmnožin dané neprázdné množiny má větší mohutnost než dan á množina. Tedy ke každé množině existuje množina s větší mohutností.

7) Množina reálných čísel je nespočetná. Množina reálných čísel má mohutnos t kontinua.