# 1. Úvod

## Definice 1.1:

***n-ární relace nad množinami*** $A_1,A_2,...,A_n$ je podmnožina $\rho$ kartézského součinu těchto množin

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n.$$

Množiny $A_1,A_2,...,A_n$ jsou ***nosiče relace*** $\rho$
. Přesněji n-ární relaci označujeme

$$\langle A_1,A_2,...,A_n;\rho\rangle.$$

## Poznámky 1.1:

1. Relace můžeme klasifikovat:
   - podle počtu druhů nosičů:
     - homogenní - s jediným druhem nosiče: $A=A_1=A_2=...=A_n$
     - heterogenní: alespoň dva nosiče jsou různého druhu
   - podle arity: unární /n=1/, binární /n=2/, ternární /n=3/,...
   - podle rozsahu:
     - triviální: - prázdná : $\rho = \emptyset$
       - úplná: $\rho = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$
     - netriviální: $\emptyset \subset \rho \subset A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

2. Každou n-ární relaci nad množinami $A_1,A_2,...,A_n$ lze formálně pojímat jako jako unární relaci nad množinou $A=A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

3. Relace jsou podmnožiny množiny $A=A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ a s jako takovými lze s nimi provádět všechny množinové operace /rela ce lze sjednocovat, pronikat, tvořit komplementy, rozdíly, symetrické ro zdíly/.

## Příklady 1.1:

- Homogenní relace:
  - číslo x leží v intervalu $\langle y,z\rangle$
  - druhá mocnina x rovná se y
  - x je prvočíslo
  - těleso x má větší hmotnost než těleso y

- Heterogenní relace:
  - bod x leží na přímce y
  - město x se nachází v zemi y
  - mezi městy x,y je vzdálenost z
  - předmět x patří člověku y

## Definice 1.2:

***Relační systém*** je uspořádaná dvojice $\langle\{A_i : i \in I\},\{\rho_j : j \in J\}\rangle$, kde $\{A_i : i \in I\}$ je množina nosičů a $\{\rho_j : j \in J\}$ je množina relací relačního systému. Ke každé relaci $\rho_j$ /$j \in J$/ je udána její arita a ke každému argumentu relace je udán index nosiče, ze kterého argument bere své hodnoty. Tyto údaje definují tzv. ***signaturu /t yp/ relace***. Počet nosičů, počet relací a signatury všech relací udávají tzv . ***signaturu /typ/ relačního systému***.

## Příklady 1.2:

1. Orientovaný graf je relační systém <V,ρ>, kde
   - V je jediný nosič systému /množina vrcholů grafu/,
   - ρ je jediná relace /binární relace definující orientované hrany grafu/.

   Signatura relačního systému je <1;1;{<2;1,1>}>.

2. Orientovaný graf /alternat. definice/ je rel. systém <V,E,ε>, kde
   - V je prvý nosič systému /množina vrcholů grafu/,
   - E je druhý nosič systému /množina hran grafu/,
   - ε je jediná relace systému /heterogenní ternární relace přiřazující hranám počáteční a koncový bod/.

   Signatura relace ε je <3;2,1,1>. Signatura relačního systému je <2;1;{<3;2,1,1>}>.

3. Bipartitní orientovaný graf /neznačená Petriho síť/ je relační systém <{P,T},{β,φ}>, kde
   - P je prvý nosič systému /množina míst Petriho sítě/,
   - T je druhý nosič systému /množina přechodů Petriho sítě/,
   - β je prvá relace systému /hrany mířící z míst do přechodů/,
   - φ je druhá relace systému /hrany mířící z přechodů do míst/.

   Signatura relace $\beta \subseteq P \times T$ je <2;1,2> a relace $\varphi \subseteq T \times P$ je <2;2,1>.
   Signatura relačního systému je <2;2;{<2;1,2>,<2;2,1>}>.

4. Fragment prostorové geometrie týkající se incidence lineárních útvarů může být popsán následujícím relačním systémem <{*B*,*P*,*R*},{bp,br,pr}>, kde
   - B je prvý nosič systému /množina bodů/,
   - P je druhý nosič systému /množina přímek/,
   - R je třetí nosič systému /množina rovin/,
   - bp je prvá relace systému /bod leží na přímce/,
   - br je druhá relace systému /bod leží v rovině/,
   - pr je třetí relace systému /přímka leží v rovině/.

## Definice 1.3:

***n-ární operace na množinách*** $A_1,A_2,...,A_n$ je zobrazení f kartézského součinu těchto množin do množiny B

$$f: A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightarrow B.$$

Množiny $A_1,A_2,...,A_n$ jsou ***nosiče argumentů*** operace f a B je ***nosič výsledku*** operace. Je-li $f(a_1,a_2,...,a_n)=b$, nazýváme prvky $a_1,a_2,...,a_n$ ***operandy*** a prvek b ***výsledkem operace***.

## Poznámky 1.2:

1. Operace můžeme klasifikovat:
   - podle počtu druhů nosičů:
     - homogenní - s jediným druhem nosiče: $A_1=A_2=...=A_n=B$
     - heterogenní: alespoň dva nosiče jsou různého druhu
   - podle arity: nulární /n=0/ unární /n=1/, binární /n=2/, ternární /n=3/,...

2. Každou n-ární operaci na množinách $A_1,A_2,...,A_n$ lze formálně pojímat jako jako unární operaci na množině $A=A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

3. Každou n-ární operaci f lze formálně vyjádřit jako (n+1)-ární relaci $\rho$:
$$f(a_1,a_2,...,a_n)=b \Leftrightarrow (a_1,a_2,...,a_n,b)\in\rho$$
4. Každou n-ární relaci $\rho$
 lze formálně vyjádřit jako n-ární operaci f zobrazující kartézský souči n $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ do množiny {0,1} /resp. {false, true}/:
$$(a_1,a_2,...,a_n)\in\rho \Leftrightarrow f(a_1,a_2,...,a_n)=1$$

## Příklady 1.3:

- Homogenní operace /na množině reálných čísel/:
  - číslo $\pi$ ... nulární operace
  - druhá mocnina x ... unární operace
  - x je součet y a z ... binární operace
  - b je aritmetický průměr čísel $a_1,a_2,...,a_n$ ... n-ární operace

- Heterogenní operace:
  - počet obyvatel města x ... unární operace
  - skalární součin dvou vektorů ... binární operace
  - součin skaláru a vektoru ... binární operace

## Definice 1.4:

***Algebraický systém*** je uspořádaná dvojice $\langle\{A_i:i\in I\},\{f_k:k\in K\}\rangle$, kde $\{A_i:i\in I\}$ je množina nosičů a $\{f_k:k\in K\}$ je množina operací algebraického systému. Ke každé operaci $f_k$ je udána její arita a ke každému argumentu operace /operandu/ je udán index nosiče, ze kterého argument bere své hodnoty /rovněž k výsledku operace je udán index nosiče, ze kterého výsledek bere svou hodnotu/. Tyto údaje definují tzv. ***signaturu /typ/ operace***. Počet nosičů, počet operací a signatury všech operací udávají tzv. ***signaturu /typ/ algebraického systému***.

## Příklady 1.4:

1. Konečné automaty jako heterogenní algebraické systémy:
   - Stavový automat bez výstupu: $\langle\{X,Q\},\{\delta\}\rangle$
   - Mealyho automat: $\langle\{X,Y,Q\},\{\delta,\lambda\}\rangle$
   - Mooreův automat: $\langle\{X,Y,Q\},\{\delta,\beta\}\rangle$
   - Mealyho iniciální automat: $\langle\{X,Y,Q\},\{\delta,\lambda,q_0\}\rangle$
   - Mooreův iniciální automat: $\langle\{X,Y,Q\},\{\delta,\beta,q_0\}\rangle$

kde
 X ... je vstupní abeceda
 Y ... je výstupní abeceda
 Q ... je množina stavů
 $\delta$ ... je přechodová funkce /binární/, $Q\times X\rightarrow Q$
 $\lambda$ ... je výstupní funkce /binární/, $Q\times X\rightarrow Y$
 $\beta$ ... je výstupní funkce /unární/, $Q\rightarrow Y$
 $q_0$ ... je počáteční stav /nulární/, $\rightarrow Y$
 Signatura např. Mooreova iniciálního automatu je
$$\langle 3;3;\{\langle 2;3,1,3,\rangle,\langle 1;3,2\rangle,\langle 0;2\rangle\}\rangle.$$

2. Množinová algebra $\langle\{2^A\},\{\emptyset,A,^-,\cup,\cap\}\rangle$ je homogenní algebra. Nosičem je systém $B=2^A$ všech podmnožin množiny A. Operací je pět:
 $\emptyset$ ... je prázdná množina /nulární operace/, $\rightarrow B$,
 A ... je úplná množina /nulární operace/, $\rightarrow B$,
 $^-$ ... je operace komplementu /unární operace/, $B\rightarrow B$,
 $\cup$ ... je operace sjednocení /binární operace/, $B\times B\rightarrow B$,
 $\cap$ ... je operace průniku /binární operce/, $B\times B\rightarrow B$.
3. Vektorový /lineární/ prostor je heterogenní algebra

$$\langle \{V,R\},\{\mathbf{+},+,*,.\}\rangle,$$

kde
V ... je množina vektorů /1.nosič/,
R ... je množina reálných čísel /2.nosič/,
**+** ... je operace sčítání vektorů /binární, homogenní/, $V \times V \to V$,
\+ ... je operace sčítání čísel /binární, homogenní/, $R \times R \to R$,
* ... je operace násobení čísla a vektoru /binární, heterogenní/, $R \times V \to V$,
. ... je operace násobení čísel /binární, homogenní/, $R \times R \to R$,

## Definice 1.4:

***Obecný /relační a algebraický/ systém*** je uspořádaná trojice

$$\langle \{A_i : i \in I\},\{\rho_j : j \in J\},\{f_k : k \in K\}\rangle,$$

kde $\{A_i : i \in I\}$ je množina nosičů, $\{\rho_j : j \in J\}$ je množina relací a $\{f_k : k \in K\}$ je množina operací systému. Počty nosičů, relací a operací spolu se sign aturami /typy/ všech relací a operací udávají ***signaturu /typ/ systému***.

## Poznámky 1.3:

1.
Protože každá operace může být pojímána jako relace /za cenu zvýšení arity/ a každá relace může být přeměněna na operaci /za cenu zvýšení ari ty a a případné dehomogenizace/, lze také převést každý algebraický syst ém na relační a obráceně.

2.
Zpravidla je výhodné pracovat s obecnou strukturou zahrnující jak rel ace tak operace. Je vhodné řídit se pravidlem: relaci, která je zobrazen ím pojednávat jako operaci a relaci, která není zobrazením na operaci ne převádět.

## Příklady 1.4:

1. Množinové systémy: $\langle \{2^A\},\{=,\subseteq\},\{\emptyset,A,\bar{\ },\cup,\cap\}\rangle$

2. Číselné systémy: $\langle N,\{=,\le\},\{+,.\}\rangle$, $\langle I,\{=,\le\},\{+,-,.\}\rangle$,
$\langle R,\{=,\le\},\{+,-,.,/\}\rangle$

3. Automat akceptor: $\langle X,Q,\delta,q_0,F\rangle = \langle \{X,Q\},\{F\},\{\delta,q_0\}\rangle$
X ... vstupní abeceda /1.nosič/,
Q ... množina stavů /2.nosič/,
$\delta$ ... přechodová funkce /binární operace/, $Q \times X \to Q$,
$q_0$ .. počáteční stav /nulární operace/, $\to Q$,
F ... množina koncových stavů /unární relace/, $F \subseteq Q$.