Cvičení x

Příklady z oblasti predikátové logiky, interpretace a modely formulí, formalizace a úsudky pomocí Vennových diagramů

Příklad 1: Předpokládejme, že

- P a Q jsou unární predikátové symboly a R je binární predikátový symbol,
- f je binární funkční symbol a g je unární funkční symbol,
- c a d jsou konstantní symboly.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací a valuací určete pravdivostní hodnotu dané formule při dané interpretaci a valuaci.

Formule:

1. $P(c) \wedge R(c, g(d))$
2. $R(c, y) \to R(x, z)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \vee R(y, z) \to R(x, z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge R(y, f(x, y)))$

Interpretace:

a) Interpretace $\mathcal{A}$, kde univerzem je množina $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Predikátům P, Q a R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{A}} = \{\alpha, \gamma\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \gamma)\}$

Funkčním symbolům f a g jsou přiřazeny funkce $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ popsané následujícími tabulkami:

$f^{\mathcal{A}}$	α	β	γ	δ
α	β	α	γ	δ
β	β	β	β	β
γ	α	γ	β	δ
δ	α	γ	β	δ

x	$g^{\mathcal{A}}(x)$
α	β
β	γ
γ	γ
δ	β

Konstantním symbolům c a d jsou přiřazeny prvky α a β, tj. $c^{\mathcal{A}} = \alpha$ a $d^{\mathcal{A}} = \beta$.

Předpokládejme valuaci ν, kde $\nu(x) = \gamma$, $\nu(y) = \alpha$ a $\nu(z) = \delta$.

b) Interpretace $\mathcal{B}$, kde univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $P^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $Q^{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $R^{\mathcal{B}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.
- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $f^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f^{\mathcal{B}}(x, y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $g^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $g^{\mathcal{B}}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2, tj. $c^{\mathcal{B}} = 0$ a $d^{\mathcal{B}} = 2$.

Předpokládejme valuaci ν, kde $\nu(x) = 2$, $\nu(y) = 4$, $\nu(z) = 4$.

Příklad 2: Následující tvrzení formulovaná v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky.

- Jako mezikrok při vytváření výsledné formule, vytvořte nejdříve „formuli“, kde jako predikátové, funkční a konstatní symboly mohou být použity standardní matematické symboly jako třeba $>$, $+$, $\cap$, $\in$, $\subseteq$, zápis číselných konstant pomocí číslic, apod., a kde jsou použity běžné konvence, jako například infixový zápis binárních funkčních a predikátových symbolů.
- Určete, co budou jednotlivé predikátové, funkční a konstatní symboly, a jaké budou jejich příslušné arity.
- Na základě „formule“ vytvořené v prvním kroku, vytvořte odpovidající formuli, která je vytvořena přesně podle formální definice syntaxe formulí predikátové logiky (přičemž je možné použít standardní konvence pro vynechávání závorek) a kde jsou jako predikátové, funkční a konstantní symboly použita pouze písmena latinské abecedy.
- Ke každé vytvořené formuli uveďte příklad interpretace, kterou jste měli při vytváření formule na mysli, tj. co bude univerzum, a jaké relace, funkce a prvky univerza budou reprezentovány jednotlivými predikátovými, funkčními a konstatními symboly. Dále vytvořte interpretaci, ve které je daná formule pravdivá (model formule) a interpretaci, ve které je formule nepravdivá.

a) Tvrzení: *„Všechna přirozená čísla, kromě nuly, jsou větší než nula.“*

b) Tvrzení: *„Pro některá přirozená čísla* x, y, z *platí, že* $x^2 + y^2 = z^2$*.“*

c) Tvrzení: *„Pro všechna reálná čísla taková, že* $x \in (0, 1)$ *platí, že* $x^2 < x$*.“*

d) Tvrzení: *„Pro reálné číslo* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *platí, že* $(\phi = \phi^2 - 1) \wedge (\phi = \frac{1}{\phi - 1})$*.“*

Příklad 3: Následující úsudky formulovane v přirozené řeči zapište formálně formulemi predikátové logiky 1. řádu, zakreslete je pomocí Vennových diagramů a rozhodněte, zda závěr (případně závěry) logicky vyplývají z daných předpokladů.

a) P1: Všechna prvočísla jsou přirozená čísla.
P2: Devítka není ani sudé číslo ani prvočíslo.
P3: Dvojka je sudé číslo.

Z1: Dvojka je prvočíslo.
Z2: Devítka je přirozené číslo. .

b) P1: Všechna prvočísla jsou přirozená čísla.
P2: Některá lichá čísla nejsou ani prvočísla ani přirozená čísla.

Z1: Některá prvočísla jsou lichá.
Z2: Některá čísla nejsou přirozená.

c) P1: Všechna přirozená čísla jsou celá čísla.
P2: Všechna celá čísla jsou reálná čísla.
P3: Číslo -5 není přirozené čislo.
P4: Číslo π je reálné.

Z1: Existují reálná čísla, která nejsou přirozenými čísly.
Z2: -5 je celé číslo.
Z3: π není přirozené číslo.