Obsah

0.1 Strukturní analýza P/T sítí 1
0.1.1 Algebraické metody strukturní analýzy 2

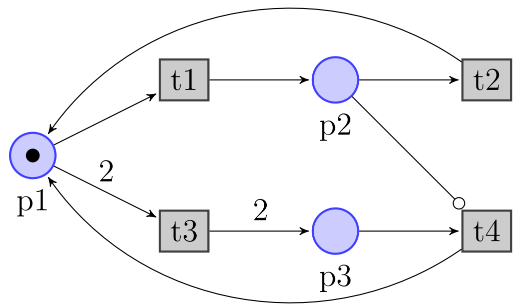
0.1 Strukturní analýza P/T sítí

Odhlédneme-li u PN-systémů od počátečního značení, získáme bipartitní orientovaný multigraf, který popisuje statickou strukturu Petriho sítě. Studium struktury Petriho sítí je zajímavé z toho důvodu, že všechny vlastnosti Petriho sítí dokázané pouze na základě struktury jsou platné pro všechny PN--systémy, které lze získat z PN-struktury přidáním libovolného počátečního značení. K strukturní analýze se uchylujeme zejména v případech, kdy selhává stavová analýza Petriho sítí založená na pojmu grafu dosažitelnosti. K takovému selhání dochází ve dvou případech:

- PN-systém je neomezený a množina dosažitelných značení a tedy i graf dosažitelnosti jsou nekonečné.
- PN-systém je omezený, ale množina dosažitelných značení je tak početná, že analýza grafu dosažitelnosti je mimo možnosti současných počítačů (state explosion problem).

Metody strukturní analýzy lze rozdělit do dvou skupin:

- metody lineární algebry (pracují s maticovou reprezentací PN-struktur),
- grafové metody (pracují přímo s grafovým popisem Petriho sítí).
  - metody redukce PN-systémů
  - metody využívající vlastností zámků a pastí
  - studium vlastností speciálních typů PN-struktur



Obrázek 1: Jednoduchá Petriho síť s inhibiční hranou.

0.1.1 Algebraické metody strukturní analýzy

Tyto metody využívají maticové reprezentace Petriho sítí.

Definice 0.1. Incidenční matice (incidence matrix, change matrix) PN--struktury $\langle P, T, I, O, H\rangle$ je matice

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}^T - \mathbf{I}^T$$

typu $|P| \times |T|$, kde $\mathbf{O} = \{O(t,p)\}$ a $\mathbf{I} = \{I(t,p)\}$ jsou matice typu $|T| \times |P|$ reprezentující vstupní a výstupní funkci O, I.

Příklad 0.1. Uvažujme PN-strukturu zobrazenou na obr.0.1.

Incidenční matice Petriho sítě je:

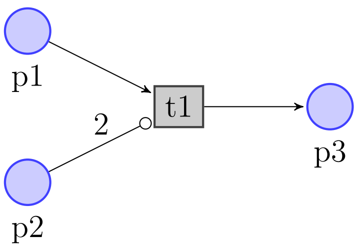
$$\mathbf{C} = \mathbf{O}^T - \mathbf{I}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řádky v maticích $\mathbf{O}$ resp. $\mathbf{I}$, tj. sloupce v maticích $\mathbf{O}^T$ resp. $\mathbf{I}^T$ jsou tvořeny koeficienty multimnožin $O(t)$ resp. $I(t)$.

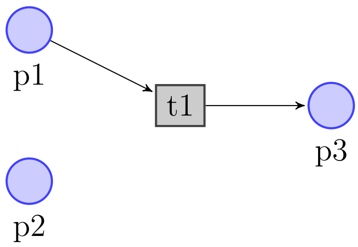
- Prvek C(p,t) matice **C** udává změnu počtu tokenů (kladnou, zápornou nebo nulovou) v místě p při provedení přechodu t.
  Vektor C(.,t) (t-sloupec matice **C**) udává změnu počtu tokenů v jednotlivých místech sítě při provedení přechodu t.
  Vektor C(p,.) (p-řádek matice **C**) udává změnu značení místa p při provedení jednotlivých přechodů sítě.

- Při zobrazení struktury Petriho sítě pomocí incidenční matice může docházet ke ztrátě informace a to v případě použití inhibičních nebo testovacích hran:

- Existence inhibičních hran se nijak neprojeví na incidenční matici. Strukturně různé PN-systémy na obrázcích 2 a 3 mají stejnou incidenční matici.

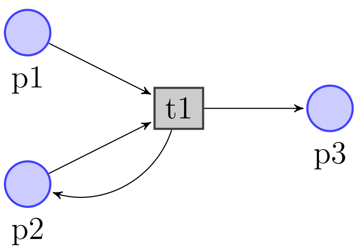


Obrázek 2: PN s inhibiční hranou

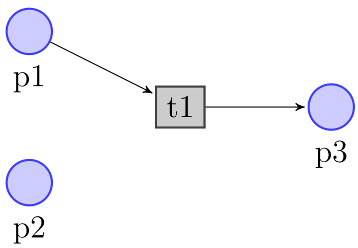


Obrázek 3: PN bez inhibiční hrany

- Hrany (p2,t), (t,p2) na obrázku 4 jsou tzv. *testovací hrany* - pomocí nich přechod t testuje přítomnost tokenu v místě p2 aniž by měnil počet tokenů v tomto místě. Strukturně různé PN-systémy na obrázcích 4 a 5 mají stejnou incidenční matici. Existence "testovacích"hran se nijak neprojeví na incidenční matici.



Obrázek 4: PN s testovací hranou



Obrázek 5: PN bez testovací hrany

- Petriho sítě, ve kterých se nevyskytují jednoduché smyčky typu $p_2 - t$ zobrazené na obrázku 4 tj. sítě, pro něž ${}^{\bullet}t \cap t^{\bullet} = \emptyset$, se nazývají *čisté* (pure). Struktura čistých sítí bez inhibičních hran je incidenční maticí popsána úplně a jednoznačně.

V dalším textu této kapitoly budeme předpokládat, bez výslovného uvádění, že všechny uvažované Petriho sítě jsou jednoznačně popsány incidenční maticí.

Definice 0.2. Uvažujme posloupnost (sekvenci) přechodů $\sigma = t_{(1)}t_{(2)}...t_{(k)}$ chápanou jako slovo nad abecedou $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}\}$, tj. $\sigma \in T^*$. *Charakteristickým vektorem* (transition count vector) sekvence σ nazveme vektor

$V_\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_{|T|})^T$, kde v_i označuje počet výskytů přechodu t_i v sekvenci σ.

Charakteristický vektor V je pro značení M realizovatelný (possible), existuje-li sekvence spustitelná ze značení M taková, že $V = V_\sigma$.

Speciálně charakteristickým vektorem přechodu t_i je vektor $V_{t_i} = (v_1, v_2, \ldots, v_{|T|})^T$, s jedinou nenulovou souřadnicí $v_i = 1$ a s $v_k = 0$ pro všechna $k \neq i$.

Stejné sekvence mají přirozeně tentýž charakteristický vektor, ale témuž charakteristickému vektoru může odpovídat mnoho různých sekvencí, z nichž některé mohou být realizovatelné a jiné nikoliv.

Věta 0.1. Nechť σ je sekvence přechodů převádějící PN-systém ze značení M do značení M', tj. $\mathbf{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}'$. Potom platí

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma,$$

kde značení $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ chápeme jako matice typu $|P| \times 1$ (sloupcové vektory), $\mathbf{C}$ je incidenční matice typu $|P| \times |T|$ a charakteristický vektor $\mathbf{V}_\sigma$ jako matici typu $|T| \times 1$ (sloupcový vektor). Vztah $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma$ bývá někdy nazýván *fundamentální rovnicí* (fundamental equation, state equation, marking equation).

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky k posloupnosti σ.

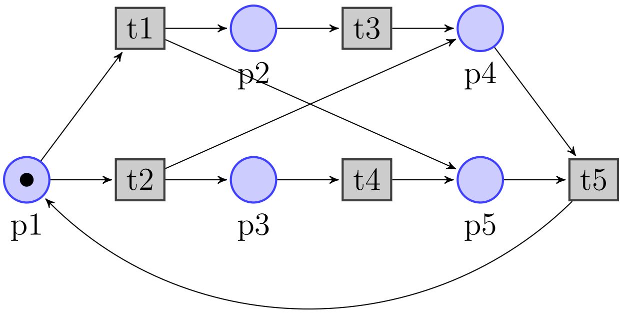
- Nechť k = 1, tj. $\sigma = t$. V tomto případě fundamentální rovnice platí, neboť:
$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + C(.,t) = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_t = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma.$$

- Dokážeme, že z platnosti tvrzení pro sekvence délky k vyplývá platnost tvrzení pro sekvence délky k+1. Uvažujme sekvenci $\tau = \sigma t$ délky k+1 převádějící PN-systém ze značení $\mathbf{M}$ do značení $\mathbf{M}'$. Přitom sekvence σ délky k převádí systém ze značení $\mathbf{M}$ do značení $\mathbf{M}''$ a sekvence t délky 1 ze značení $\mathbf{M}''$ do značení $\mathbf{M}'$. Platí
$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'' + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_t = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_t = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{V}_\sigma + \mathbf{V}_\mathbf{t}) = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\tau.$$

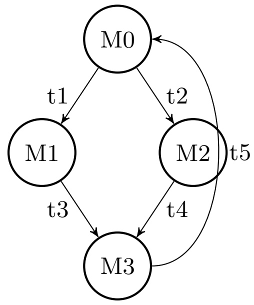
□

Platnost fundamentální rovnice je pouze nutnou podmínkou pro dosažitelnost $\mathbf{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}'$, nikoliv však podmínkou postačující. Viz poslední odstavec textu následujícího příkladu. Jsou-li dvě různé sekvence σ, τ se společným charakteristickým vektorem $\mathbf{V}_\sigma = \mathbf{V}_\tau$ spustitelné ze značení $\mathbf{M}$, pak provedení obou sekvencí vede vždy ke stejnému konečnému značení $\mathbf{M}'$.

Příklad 0.2. Na obrázku 6 je zobrazen jednoduchý PN-systém a na obrázku 7 jeho graf dosažitelnosti. Algebraický výpočet grafu dosažitelnosti (na základě incidenční matice, tj. rovnice $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + C(.,t)$) je proveden v tabulce 1.



Obrázek 6: Jednoduchá PN



Obrázek 7: Graf dosažitelnosti PN

	t1	t2	t3	t4	t5	M0	M1	M2	M3
p1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	0
p2	1	0	-1	0	0	0	1	0	0
p3	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
p4	1	0	0	1	-1	0	0	1	1
p5	1	0	0	1	-1	0	1	0	1
						M3+t5	M0+t1	M0+t2	M1+t3;M2+t4

Tabulka 1: Matice **C** a dosažitelná značení.

PN systém je bezpečný, živý a reversibilní. Pro všechna dosažitelná značení $\{\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3\}$ má rovnice $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$ řešení (řešením jsou charakteristické vektory sekvencí, které převádějí PN-systém z počátečního stavu $\mathbf{M}_0$ do stavu $\mathbf{M}$). Rovnice $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$ má však často řešení i pro nedosažitelná značení. Tak např. pro značení $\mathbf{M} = (0, 1, 1, 0, 0)^T$, které není dosažitelné, má fundamentální rovnice řešení $\mathbf{X} = (1, 1, 0, 0, 1)^T$.

Definice 0.3. *P-invariantem struktury* $< P, T, I, O >$ (p-semiflow) nazýváme vektor $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{|P|})^T$, $y_i \in N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, který anuluje zleva incidenční matici $\mathbf{C}$, tj. vektor, pro který platí

$$\mathbf{Y}^T.\mathbf{C} = \mathbf{0}^T.$$

Množina $P_Y = \{p_i \in P : y_i > 0\}$ se nazývá *nosičem p-invariantu* $\mathbf{Y}$. Je-li aspoň jedno $y_i > 0$, pak p-invariant nazýváme *netriviálním*. Triviální nulový invariant $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ nemá žádný praktický význam. Jsou-li všechna $y_i \in 0, 1$, pak p-invariant nazýváme *binárním.*

Věta 0.2. Nechť $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ jsou p-invarianty a $_k1, k_2$ celá nezáporná čísla. Potom platí:

1. Lineární kombinace $k_1\mathbf{Y}_1+k_2\mathbf{Y}_2$ je rovněž p-invariantem a jeho nosičem je sjednocení nosičů p-invariantů $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$.

2. Je-li $\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \geq \mathbf{0}$, pak $\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2$ je rovněž p-invariantem.

Důkaz. 1. $(k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2)^T\mathbf{C} = (k_1\mathbf{Y}_1^T + k_2\mathbf{Y}_2^T)\mathbf{C} = k_1\mathbf{Y}_1^T\mathbf{C} + k_2\mathbf{Y}_2^T\mathbf{C} = k_1\mathbf{0}^T + k_2\mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T$

2. $(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)^T\mathbf{C} = (\mathbf{Y}_1^T - \mathbf{Y}_2^T)\mathbf{C} = \mathbf{Y}_1^T\mathbf{C} - \mathbf{Y}_2^T\mathbf{C} = \mathbf{0}^T - \mathbf{0}^T = \mathbf{0}^T$

□

Petriho síť je *pokryta p-invarianty*, jestliže každé místo patří do nosiče nějakého pinvariantu PN-struktury. Je-li Petriho síť pokryta p-invarianty, pak existuje p-invariant, který pokrývá celou síť (jeho nosičem je množina všech míst).

Množina všech p-invariantů dané PN-struktury představuje speciální druh lineárního (vektorového) prostoru, ve kterém koeficienty lineárních kombinací mohou být pouze celá nezáporná čísla.

P-invariant $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{|P|})^T$ je v *kanonickém tvaru*, jestliže jeho souřadnice y_i jsou nesoudělné (jejich největší společný dělitel je 1). P-invariant $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{|P|})^T$ je *minimální*, jestliže neexistuje žádný jiný p-invariant $\mathbf{Y}'$ (téže dané struktury) pro který by platilo $\mathbf{Y}' \leq \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}' \neq \mathbf{Y}$. Systém p-invariantů (dané struktury) je úplný, jestliže každý p-invariant (téže dané struktury) je vyjádřitelný jako jejich lineární kombinace.

Následující algoritmus umožňuje vypočítat úplný systém p-invariantů (případně t-invariantů duální PN).

Věta 0.3. Nechť $\mathbf{Y}$ je p-invariantem PN-struktury $\langle P, T, I, O\rangle$. Potom pro všechny PN-systémy $\langle P, T, I, O, M_0\rangle$ platí:

$$(\forall \mathbf{M} \in RS(\mathbf{M}_0)[\mathbf{Y}^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}_0].$$

Důkaz. Podle věty 0.1 platí pro libovolná značení $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ implikace

$$\mathbf{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}' \Rightarrow \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma,$$

neboli speciálně také

$$\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}_\sigma.$$

Algoritmus 1: Výpočet úplného systému minimálních p-invariantů

Vstup: Incidenční matice $\mathbf{C}$ typu $(m, n) = (|P|, |T|)$.

Výstup: Množina všech minimálních p-invariantů.

1 Inicializace: $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I_m}$, ($\mathbf{I_m}$ je jednotková matice řádu $m = |P|$).

2 Pro $j = 1, 2, \ldots, n$ ($n = |T|$) prováděj: Přidej ke složené matici $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ všechny řádky, které jsou lineárními kombinacemi s přirozenými koeficienty dvojic řádků z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ a které současně anulují j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ a potom vyškrtej z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ všechny řádky s nenulovým prvkem v j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$.

3 Všechny řádky matice $\mathbf{B}$ převeď do kanonického tvaru (tj. vyděl každý řádek největším společným dělitelem všech jeho prvků).

4 Odstraň z matice $\mathbf{B}$ všechny neminimální p-invarianty (tj. vyškrtej z matice $\mathbf{B}$ všechny řádky, které pokrývají nějaký jiný řádek matice $\mathbf{B}$).

5 Řádky matice $\mathbf{B}$ představují úplný soubor minimálních p-invariantů PN struktury

Vynásobíme-li poslední maticovou rovnici vektorem (řádkovou maticí) $\mathbf{Y}^T$ dostaneme vztah

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}_0 + \mathbf{Y}^T\mathbf{C}\mathbf{V}_\sigma.$$

Podle předpokladu věty je $\mathbf{Y}$ p-invariantem příslušné PN-struktury. Platí tedy $\mathbf{Y}^T\mathbf{C} = \mathbf{0}^T$ a poslední rovnice se redukuje na vztah $\mathbf{Y}^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}_0$, který měl být dokázán. □

Definice 0.4. Vztah

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}_0$$

platný podle věty 0.3 pro všechna značení $\mathbf{M}$ dosažitelná z počátečního značení $\mathbf{M}_0$, nazýváme *p-invariantem PN-systému* $\langle P, T, I, O, M_0\rangle$ (conservation law). *P-invariant* $\mathbf{Y}$ *příslušné struktury* $\langle P, T, I, O\rangle$ má zde význam váhového vektoru: jeho souřadnice y_i jsou konstanty, udávající váhu značení $m_i = M(p_i)$ jednotlivých míst p_i. Rozepsáním maticového zápisu do skalární podoby, dostáváme vztah

$$\sum_{i=1}^{|P|} y_i m_i = k,$$

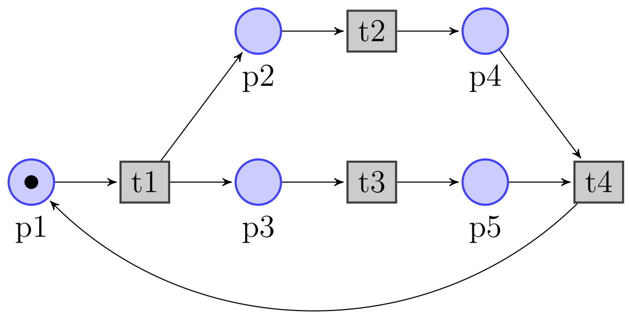
kde k je konstanta určená vztahem

$$k = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}_0 = \sum_{\forall i} y_i m_{Oi}.$$

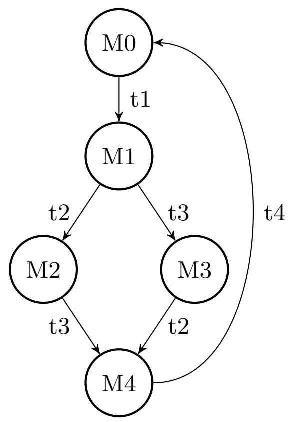
Podsystém systému $\langle P, T, I, O, M_0\rangle$ indukovaný nosičem p-invariantu $P_\mathbf{Y}$ se nazývá *konzervativní komponentou* tohoto systému (spolu se všemi místy z nosiče $P_{\mathbf{Y}}$ patří do komponenty také všechny přechody, které jsou bezprostředními sousedy těchto míst a také všechny hrany spojující tato místa a přechody). Systém $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ je *konzervativní*, jestliže existuje p-invariant takový, že $P_{\mathbf{Y}} = P$. Systém je *striktně konzervativní*, jestliže navíc $y_i = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, |P|$.

Je-li PN-systém konzervativní a je-li počáteční značení konečné, pak je PN-systém omezený.

Příklad 0.3. Uvažujme PN-systém zobrazený na obrázku 8. V tabulce 2 je vypočtena množina dosažitelných značení a na obrázku 9 je zobrazen graf dosažitelnosti.



Obrázek 8: Jednoduchá PN



Obrázek 9: Graf dosažitelnosti PN

	t1	t2	t3	t4		M0	M1	M2	M3	M4
p1	-1	0	0	1	m1	1	0	0	0	0
p2	1	-1	0	0	m2	0	1	0	0	0
p3	1	0	-1	0	m3	0	0	1	0	0
p4	0	1	0	-1	m4	0	0	1	1	1
p5	0	0	1	-1	m5	0	1	0	1	1
						M4+t4	M0+t1	M1+t2	M1+t2	M2+t3;M3+t2

Tabulka 2: Matice **C** a dosažitelná značení.

Nejdříve nalezneme strukturní p-invarianty PN-systému (obrázek 8). Budeme postupovat podle algoritmu 1, který je reprezentován tabulkou 3.

	C				**B**				
1.	-1	0	0	1	1	0	0	0	0
2.	1	-1	0	0	0	1	0	0	0
3.	1	0	-1	0	0	0	1	0	0
4.	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
5.	0	0	1	-1	0	0	0	0	1
6.=1.+2.	0	-1	0	1	1	1	0	0	0
7.=1.+3.	0	0	-1	1	1	0	1	0	0
8.=4.+6.	0	0	0	0	1	1	0	1	0
9.=5.+7.	0	0	0	0	1	0	1	0	1

Tabulka 3: Výpočet p-invariantů dle algoritmu 1. V tabulce zůstaly poslední dva nulové řádky (v části C) jimž odpovídají p-invarianty v části B.

Nalezené p-invarianty jsou: $\mathbf{Y}_1 = (1,1,0,1,0)^T$ a $\mathbf{Y}_2 = (1,0,1,0,1)^T$ a všechna ostatní řešení jsou tvaru $k_1\mathbf{Y}_1 + k_2\mathbf{Y}_2$, $k_1, k_2 \in \{0,1,2,\ldots\}$. Ze složených p-invariantů je nejvýznamnější $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = (2,1,1,1,1)^T$.

Všechny uvedené invarianty jsou v kanonickém tvaru. Invarianty $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ jsou minimální a tvoří úplný systém minimálních invariantů (tj. každý jiný invariant lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci s celočíselnými nezápornými koeficienty). Invariant $\mathbf{Y}_3$ minimální není, protože např. $\mathbf{Y}_3 \geq \mathbf{Y}_1$. Vzhledem k tomu, že existuje p-invariant pokrývající celou množinu P ($P_{Y_3} = P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$), je PN-systém konzervativní, ale nikoliv striktně. Strukturním p-invariantům $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ odpovídají systémové p-invarianty $\mathbf{Y}_1^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}_1^T\mathbf{M}_0, \mathbf{Y}_2^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}_2^T\mathbf{M}_0, \mathbf{Y}_3^T\mathbf{M} = \mathbf{Y}_3^T\mathbf{M}_0$, které lze rozepsat do následujících rovnic

$$\begin{array}{cccccccc} m_1 & +m_2 & & +m_4 & & = & 1, \\ m_1 & & +m_3 & & +m_5 & = & 1, \\ 2m_1 & +m_2 & +m_3 & +m_4 & +m_5 & = & 2. \end{array}$$

Platnost uvedených rovnic pro všechna značení dosažitelná z počátečního značení M_0 lze ověřit z tabulky dosažitelných značení 2, a nebo - díky jednoduchosti zvoleného příkladu – ověřit přímo z obrázku 8.

Definice 0.5. *T-invariantem struktury* $\langle P, T, I, O\rangle$ (t-semiflow) nazýváme vektor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{|T|})^T$, $x_i \in N = \{0,1,2,\ldots\}$, který anuluje zprava incidenční matici, tj. vektor pro který platí

$$\mathbf{CX} = \mathbf{0}.$$

Množina $T_X = \{t_i \in T : x_i > 0\}$ se nazývá *nosičem t-invariantu* $\mathbf{X}$. Je-li aspoň jedno $x_i > 0$, pak invariant nazýváme *netriviálním*, jsou-li všechna $x_i \in \{0, 1\}$, pak t-invariant nazýváme *binárním*.

Věta 0.4. Nechť $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ jsou t-invarianty a k_1, k_2 celá nezáporná čísla. Potom platí:

- Lineární kombinace $k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2$ je rovněž t-invariantem a jeho nosičem je sjednocení nosičů invariantů $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$.
- Je-li $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \geq \mathbf{0}$, pak $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ je rovněž t-invariantem.

Důkaz. Obdobný jako důkaz věty 0.2 □

Petriho síť je pokryta t-invarianty, jestliže každé přechod patří do nosiče nějakého t-invariantu PN-struktury. Je-li Petriho síť pokryta t-invarianty, pak existuje t-invariant, který pokrývá celou síť (jeho nosičem je množina všech přechodů).

Množina všech t-invariantů dané PN-struktury představuje druh lineárního (vektorového) prostoru, ve kterém jsou přípustné pouze celočíselné a nezáporné lineární kombinace vektorů.

Pojmy kanonický tvar invariantu, minimální invariant, úplný systém invariantů jsou pro t-invarianty definovány stejným způsobem jako pro p-invarianty.

Výpočet úplného systému minimálních t-invariantů lze převést na výpočet úplného systému minimálních p-invariantů duální PN-struktury (definice 0.7).

Pro výpočet t-invariantů lze použít algoritmu 1 pro výpočet p-invariantů, s jediným rozdílem - místo incidenční matice $\mathbf{C}$ použijeme její transpozici $\mathbf{C}^T$ (přesněji: v inicializačním kroku algoritmu klademe $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$, kde $\mathbf{I}_n$ je jednotková matice řádu $n = |T|$).

Věta 0.5. Nechť $\mathbf{X}$ je t-invariantem PN-struktury $\langle P, T, I, O \rangle$. Potom existuje PN-systém $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ takový že:

$$(\exists \sigma \in T^*)[\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}_0 \wedge \mathbf{V}\sigma = \mathbf{X}]$$

Důkaz. Podle věty 0.1 platí pro libovolná značení $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$ implikace

$$\mathbf{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}' \Rightarrow \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}\mathbf{V}_\sigma,$$

neboli speciálně také

$$\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{C}\mathbf{V}_\sigma.$$

Položíme-li $\mathbf{V}_\sigma = \mathbf{X}$, pak $\mathbf{CV}_\sigma = \mathbf{CX} = \mathbf{O}$ (neboť $\mathbf{X}$ je t-invariant) a tedy $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Výše uvedenou implikaci nelze obrátit a tedy nikoliv jakákoliv posloupnost přechodů σ s daným charakteristickým vektorem $\mathbf{V}\sigma = \mathbf{X}$ musí být proveditelná při jakémkoliv značení M_0. S tím souvisí použití existenčních kvantifikátorů v tvrzení věty. □

Definice 0.6. Posloupnost přechodů $\sigma \in T^*$ pro kterou platí $\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbf{M}_0$ nazýváme *t-invariantem PN-systému* $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ (reproduction law).

Podsystém systému $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ indukovaný nosičem t-invariantu T_X se nazývá *repetiční komponentou* tohoto systému (spolu se všemi přechody z nosiče T_X patří do komponenty také všechna místa, které jsou bezprostředními sousedy těchto přechodů a také všechny hrany spojující tyto přechody a místa). Systém $\langle P, T, I, O, M_0 \rangle$ je *repetiční (konzistentní)*, jestliže existuje t-invariant takový, že $T_X = T$. Systém je *striktně repetiční*, jestliže navíc $x_i = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, |T|$.

Definice 0.7. Předpokládejme PN-struktury bez inhibičních hran. Potom PN-struktura $\langle P', T', I', O' \rangle$ je **duální** k struktuře $\langle P, T, I, O \rangle$, jestliže platí:

$$P' = T \wedge T' = P \wedge O' = I \wedge I' = O.$$

Duální struktura vznikne z původní vzájemnou záměnou míst a přechodů a změnou orientace všech hran při zachování jejich násobnosti.

Z definice 0.7 vyplývá, že je-li $\langle P', T', I', O' \rangle$ duální k $\langle P, T, I, O \rangle$, pak také $\langle P, T, I, O \rangle$ je duální k $\langle P', T', I', O' \rangle$. Uvedené struktury jsou tedy duální navzájem.

Věta 0.6. Nechť $\langle P', T', I', O' \rangle$ a $\langle P, T, I, O \rangle$ jsou vzájemně duální sítě s incidenčními maticemi **C'** a **C**. Potom platí:

- $\mathbf{C}' = \mathbf{C}^T$,
- p-invariant struktury $\langle P', T', I', O' \rangle$ je t-invariantem struktury $\langle P, T, I, O \rangle$,
- t-invariant struktury $\langle P', T', I', O' \rangle$ je p-invariantem struktury $\langle P, T, I, O \rangle$,

Důsledkem této věty je, že výpočet úplného systému mnimálních t-invariantů dané PN-struktury může být proveden podle téhož algoritmu jako výpočet úplného systému mnimálních p-invariantů (viz popis algoritmu 1) s jediným rozdílem: místo s incidenční maticí $\mathbf{C}'$ pracujeme s její transpozicí $\mathbf{C}^T$. Výpočet je ilustrován v příkladě 0.4.

Příklad 0.4. Spočteme t-invarianty Petriho sítě z příkladu 0.3. Proces výpočtu t-invariantu je demonstrován tabulkou 4.

	$\mathbf{C}^T$					$\mathbf{B}$			
1.	-1	1	1	0	0	1	0	0	0
2.	0	-1	0	1	0	0	1	0	0
3.	0	0	-1	0	1	0	0	1	0
4.	1	0	0	-1	-1	0	0	0	1
5.=1.+4.	0	1	1	-1	-1	1	0	0	1
6.=2.+5.	0	0	1	0	-1	1	1	0	1
7.=3.+6.	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Tabulka 4: Výpočet t-invariantů dle algoritmu 1. V tabulce zůstal poslední nulový řádek (v části C) jemuž odpovídá t-invariant v části B.

Strukturní t-invariant $\mathbf{X} = (1, 1, 1, 1)$ tvoří úplný minimální systém t-invariantů a je v kanonickém tvaru. Protože nosičem tohoto t-invariantu je celá množina T, je tato síť repetiční. Další strukturní t-invarianty jsou nezápornými násobky $\mathbf{X}$. Systémovým t-invariantem je posloupnost přechodů taková, že její charakteristický vektor je roven některému t-invariantu. Např. $\sigma_1 = t_1, t_2, t_3, t_4$ nebo $\sigma_2 = t_1, t_3, t_2, t_4$. Platí, že $V_{\sigma 1} = V_{\sigma 2} = \mathbf{X}$.