Cvičení 5

Pojmy nutné pro úspěšné zvládnutí následujících příkladů: algebraické struktury s jednou operací (gupoid, pologrupa, monoid, grupa, Abelova grupa) a jejich vlastnosti (Uz, As, Ko, EJ, EN, EI, Idp). Morfismy a kongruence. Algebraické struktury s dvěma operacemi (svazy, okruhy a tělesa). Vlastnosti svazů (úplnost, komplementarita, distributivnost, modularita). A ještě se vrátíme k izotonnímu (antitonnímu) zobrazení z minulého cvičení.

Příklad 1:

- Určete vlastnosti následujících algebraických struktur (uzavřenost, asociativnost, existence nulového (agresivního) prvku, existence jednotkového (neutrálního) prvku, existence inverzních prvků, komutativita, idempotentnost).
- Určete typ algebraické struktury (grupoid, pologrupa, monoid, grupa, komutativní grupa).
- Určete podalgebry dané algebry.
- Pokud existuje na dané algebraické struktuře netriviální kongruence, tak ji určete.
- Určete, zda mezi danou algebraickou strukturou (případně alg. strukturou nad faktorovou množinou) a $(\mathbb{Z}_k, +)$ nebo $(\mathbb{Z}_k, \cdot)$ existuje nějaký morfismus a uveďte ho.

a) $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	a
c	b	a	c

b) $(A, \circ)$, kde $A = \{a, b, c\}$

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

c) $(A, \heartsuit)$, kde $A = \{a, b, c\}$

♡	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

d) $(\mathbb{Z}_2, +)$,

e) $(B, \ddot\smile)$, kde $B = \{a, b, c, d\}$

$\ddot\smile$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

f) $(\mathbb{Z}_4, +)$,

g) $(\mathbb{Z}_5 \setminus [0]_5, \cdot)$,

h) $(\{0, 1\}, \wedge)$,

i) $(\{0, 1\}, \vee)$,

j) $(\{a, b, c\}^*, \cdot)$, kde operace $\cdot$ je zřetězení slov,

k) $(P(A \times A), \circ)$, kde operace $\circ$ je skládání relací.

Příklad 2: Napište Cayleyho tabulku pro danou operaci na daném nosiči, určete o jakou algebraickou strukturu se jedná a nalezněte všechny podalgebry dané algebry. Pokud je daná struktura grupou, tak určete řády jednotlivých prvků.

a) $(\mathbb{Z}_3, +)$, $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$,

b) $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$,

c) $(\mathbb{Z}_5, +)$, $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$,

d) $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_9 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$,

Příklad 3: Uvažujte matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ v algebraické struktuře $(\mathbb{R}^{2x2}, \cdot)$. Určete strukturu, kterou generují mocniny tohoto prvku.

Příklad 4: Na množině celých čísel je dána relace $R_5 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a - b) \bmod 5 = 0\}$. Ověřte, zda je daná relace R_5 ekvivalencí. Rozhodněte, zda je daná relace R_5 kongruencí na algebraických strukturách:

a) $(\mathbb{Z}, +)$
b) $(\mathbb{Z}, -)$
c) $(\mathbb{Z}, \cdot)$
d) $(\mathbb{Z}, :)$

Napište Cayleyho tabulky pro operace a) – d) (pokud to je možné) na faktorové množině $\mathbb{Z}_5$ a určete typy algebraických struktur $(\mathbb{Z}_5, operace_x)$.

Příklad 5: Ověřte, zda následující ekvivalence jsou kongruencemi na dané algebře.

Pozn. $\mathbb{Z}_4$ je množina zbytkových tříd modulo 4. Zápisem $\overline{x}$ pak označujeme tu jednu zbytkovou třídu modulo 4, která je reprezentována číslem x, např. $\overline{0} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$ a $\overline{1} = \{\ldots, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$.

a) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence α, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\alpha = \overline{0} \cup \overline{2}$, $[1]_\alpha = \overline{1} \cup \overline{3}$,
b) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence β, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\beta = \overline{0} \cup \overline{1}$, $[2]_\beta = \overline{2} \cup \overline{3}$,
c) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence γ, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\gamma = \overline{0}$, $[1]_\gamma = \overline{1}$, $[2]_\gamma = \overline{2}$, $[3]_\gamma = \overline{3}$,
d) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence δ, která indukuje následující třídu rozkladu: $[0]_\delta = \{x; x \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 6: Zjistěte, zda dané zobrazení f je morfismem mezi následujícími algebraickými strukturami a určete typ morfismus.

a) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$ a f(x)=2x mod 4,
b) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$ a f(x)=(2x mod 4)+1,
c) $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$ a f(x)=2x,
d) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$ a $f(x) = \log(x)$,
e) $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}, \cdot)$ a $f(x) = e^x$ (co musíte změnit, aby se jednalo o izomorfismus?),
f) $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}, +)$ a $f(x) = k \cdot x$.

Příklad 7: Rozhodněte a zdůvodněte, zda je zadaná relační struktura svazem.

a) (A,α), kde $A = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{(a, c), (a, f), (b, c), (b, d), (c, e), (f, e), (d, e)\}$, $\alpha = RE(TR(\tau))$
b) (B,β), kde $B = \{x \in N, 36 \bmod x = 0\}$ a $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow y \bmod x = 0$
c) (P($\{1, 2, 3\}$),$\subseteq$)
d) (E,ϵ), kde $E = N - \{0\}$ a $(x, y) \in \epsilon \Leftrightarrow x|y$

e) (F,ϕ), kde $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a $\theta = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (e, d), (e, f), (c, d), (d, g), (f, g)\}$ a $\phi = id(F) \cup Tr(\theta)$
f) (G,γ), kde $G = \{a, b, c, e, f, g\}$, $\rho = \{(a, b), (a, e), (b, g), (e, f), (g, f)\}$ a $\gamma = id(G) \cup Tr(\rho)$
g) (H,χ), kde $H = N$, $\chi = \{(0, 1)\} \cup \{(0, x),\ kde\ x \in \{2, 3, 4, \dots\}\} \cup \{(x, 1), kde\ x \in \{2, 3, 4, \dots\}\}$ a $\gamma = id(H) \cup \chi$
h) (Z,ω), kde $Z = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (e, f), (d, f)\}$, $\omega = RE(TR(\rho))$

Příklad 8: Pro svazy z příkladu 7 ověřte, zda splňují distributivní zákony ($a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$) či zákony modularity (pro $a \geq c$: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ a pro $a \leq c : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$). Určete, které z nalezených svazů jsou distributivní a které modulární. Ověřte, zda jsou tyto svazy komplementárními (tj. existuje svazová 0, 1 a každý prvek má alespoň jeden komplement, kde pro komplement platí: $a \wedge a' = 0$ a $a \vee a' = 1$) a případně jsou dokonce booleovskými.

Příklad 9: Rozhodněte, které z následujících algebraických struktur jsou okruh, unitární okruh, obor, obor integrity, těleso či pole.

a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,
b) $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$,
c) $(\mathbb{Z}_{42}, +, \cdot)$,
d) $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, kde p je prvočíslo,
e) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,
f) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,
g) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$,
h) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$.