Cvičení 3

Pojmy potřebné pro zvládnutí tohoto cvičení:
ostré a neostré uspořádání; Hasseův diagram; relace bezprostředního předcházení; min, max, nejmenší a největší prvek uspořádané množiny; supremum a infimum uspořádané množiny; svaz jako relační struktura, topologické uspořádání vrcholů grafu a jádro grafu.

Příklad 1: Které z následujících relací jsou uspořádáním? Pokud jsou uspořádáním, tak určete jakým.

a) (A,α), kde $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$ a $\alpha = \{(1, 2), (2, 5), (1, 5), (3, 5), (4, 5)\}$,
b) (B,β), kde $B = \{x \in \mathbb{N}, x \bmod 2 = 0\}$ a $\beta = \{(x, y) \in B \times B, x = y\}$,
c) (C,γ), kde $C = \{a, b, c\}$ a $\gamma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a)\}$,
d) (D,δ), kde $D = \{x, x = 2^k\ k \in \mathbb{N}\}$ a $\delta = \{(x, y), y \bmod x = 0\}$,
e) (E,ϵ), kde $E = \{x, x = 3k\ k \in \mathbb{N}^+\}$ a $\epsilon = \{(x, y), y \bmod x = 0\}$,
f) (F,ϕ), kde $F = \mathbb{N}$ a $\phi = \{(x, y), x + y = 100\}$.

Příklad 2: Následující uspořádání popište pomocí relace bezprostředního předcházení a znázorněte pomocí Hasseova diagramu:

a) (A,α), kde $A = \{x \in \mathbb{N}$, kde x celočíselně dělí 42 $\}$ a $(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow$ x celočíselně dělí y,
b) (B,β), kde $B = \{x \in \mathbb{N}, 36 \bmod x = 0\}$ a $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow y \bmod x = 0$,
c) (P($\{1, 2, 3\}$),$\subseteq$),
d) (D,γ), kde $D = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\delta = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (c, f), (e, d), (e, f)\}$ a $\gamma = id_D \cup Tr(\delta)$.

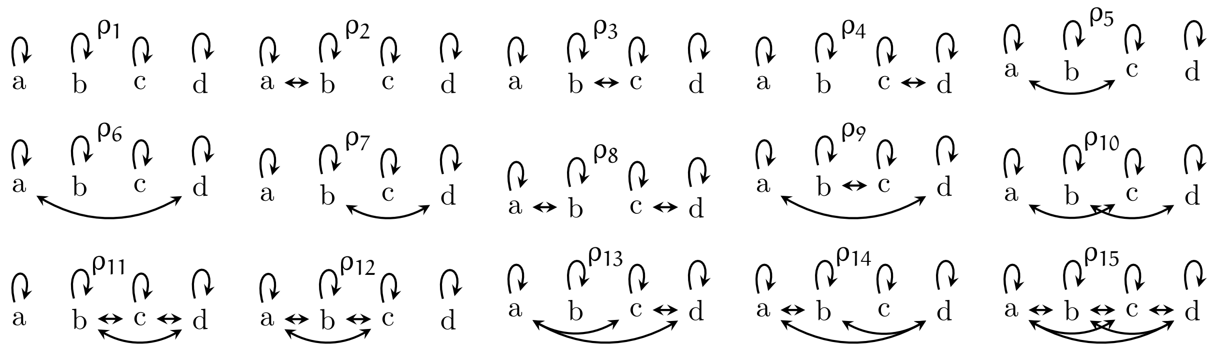
Příklad 3: Je dán systém množin $\mathcal{A}_i$ nad množinou $A = \{a, b, c, d, e\}$. Zakreslete pomocí Hasseova diagramu prvky v tomto systému uspořádané podle množinové inkluze (tj. $A_{ik} \leq A_{ip} \Leftrightarrow A_{ik} \subseteq A_{ip}$). Rozhodněte, zda je daný systém množin $\mathcal{A}_i$ uzávěrovým systémem (tj. uzavřeným na průnik a obsahující A).

a) $\mathcal{A}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d, e\}, A\}$,
b) $\mathcal{A}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d, e\}, A\}$,
c) $\mathcal{A}_2 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, A\}$.
d) Jaký je vztah uzávěrových systémů ke svazům?

Příklad 4: Jsou dány relace uspořádání $\alpha = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$ a $\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, a)\}$ na množině $A = \{a, b, c\}$. Rozhodněte, zda výsledná relace je uspořádáním. Případná uspořádání zakreslete pomocí Hasseova diagramu.

a) $\alpha \cap \beta$,
b) $\alpha \cup \beta$,
c) α^{-1}

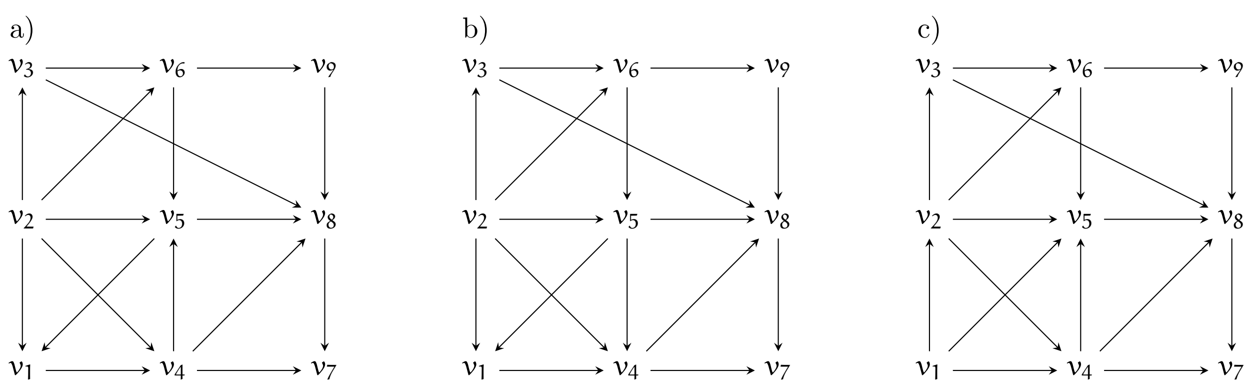
Příklad 5: Je dán následující systém EKV ekvivalencí ρ_i na množině $A = \{a, b, c, d\}$. Vytvořte Hasseův diagram pro uspořádání níže daných ekvivalencí, kde $(\rho_i \leq \rho_j) \Leftrightarrow \rho_i \subseteq \rho_j$.



Příklad 6: Najděte, pokud existují, min, max, nejmenší a největší prvek, dolní a horní závoru, sup a inf u podmnožin daných množin s uspořádaním (první čtyři množiny jsou použity z příkladu 2, poslední množina je z příkladu 5 a zbývající jsou standardní množiny s obvyklým či zadaným uspořádáním):

a) $M_1 \subset A$, $M_1 = \{1, 3, 6, 21\}$,
b) $M_2 \subset B$, $M_2 = \{2, 3, 12, 18\}$,
c) $M_3 \subset P(\{1, 2, 3\})$, $M_3 = \{\{1\}, \{3\}\}$,
d) $M_4 \subset D$, $M_4 = \{b, c, e\}$,
e) $M_5 \subset \mathbb{Q}$, $M_5 = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$,
f) $M_6 \subset \mathbb{R}$, $M_6 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}$,
g) $M_7 \subset \mathbb{R}$, $M_7 = \{0.4, 0.44, 0.444, 0.4444, \ldots\}$,
h) $M_8 \subset \mathbb{R}$, $M_8 = \emptyset$,
i) $M_9 \subset \mathbb{N}$, $M_9 = \{2, 3, 4, 5\}$ a uspořádání je dáno celočíselnou dělitelností (tj. $x \leq y \Leftrightarrow x|y$),
j) $M_{10} \subset \mathsf{EKV}$, $M_{10} = \{\rho_2, \rho_8, \rho_{14}\}$.

Příklad 7: Je dán orientovaný graf. Rozhodněte, zda se jedná o graf acyklický. Pokud je acyklický, určete topologické uspořádání vrcholů a hran a jeho jádro.



Příklad 8: Připomeňte si lexikografické uspořádání a uspořádejte následující množinu slov

nad abecedou $\mathsf{A} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, kde jsou symboly uspořádány tak, jak jsou uvedeny v množině A. Slova, která se mají lexikograficky uspořádat: $\heartsuit\clubsuit\spadesuit$, $\heartsuit\spadesuit\diamondsuit$, $\diamondsuit\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$, $\diamondsuit\clubsuit\spadesuit$, $\diamondsuit\spadesuit$, $\diamondsuit\spadesuit\clubsuit\heartsuit$. Jak budou uspořádaná slova, pokud je množina A' s následujícím uspořádáním $\mathsf{A}' = \{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$?