Cvičení 2

Pojmy potřebné pro zvládnutí cvičení: binární homogenní a heterogenní relace, identická relace, skládání relací, relace inverzní, relace tolerance, třídy tolerance, pokrytí množiny, relace ekvivalence, třídy ekvivalence, rozklad množiny, faktorová množina a kanonické zobrazení, uzávěrový systém a uzávěrový operátor, grafy, hypergrafy a simpliciální komplexy, jádro grafu.

Příklad 1: Je dána binární homogenní relace $\rho \subseteq X \times X$, kde $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\rho = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (d, c)\}$.

a) Zakreslete relaci ρ pomocí grafu,
b) vytvořte matici sousednosti $A(\rho)$,
c) určete prvky relace $\rho \circ \rho$,
d) zakreslete do grafu a napište matici sousednosti $A(\rho \circ \rho)$
e) spočtěte matici $A(\rho)^2$.
f) Jaký je vztah mezi $A(\rho)^2$ a $A(\rho \circ \rho)$?
g) Určete vlastnosti relace ρ.
h) Určete jednotlivé uzávěry (reflexivní, symetrický, tranzitivní a ekvivalenční) relace ρ. Je některý z těchto uzávěrů uspořádáním?

Příklad 2: Určete všechny relace ekvivalence ($\epsilon_i, i = 1, 2, 3, \ldots$) na množině $X = \{a, b, c, d\}$. Pro dvě různé netriviální ekvivalence určete:

a) $\epsilon_i \cap \epsilon_j$ a ověřte, zda je průnik dvou ekvivalencí vždy ekvivalencí,
b) $\epsilon_i \cup \epsilon_j$ a ověřte, zda je sjednocení dvou ekvivalencí vždy ekvivalencí,
c) ϵ_i^k pro $k \in \{2, 3, 4\}$,
d) třídy rozkladu dle ekvivalence ϵ_i na množině X (tj. $[x]_{\epsilon_i}$ pro $x \in X$),
e) faktorovou množinu (rozklad) podle dané ekvivalence (X/ϵ_i) a zapište kanonické zobrazení množiny X na X/ϵ_i.
f) možné Dú: schématicky vypište všechny ekvivalence na pětiprvkové množině $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Příklad 3: Rozhodněte, která z následujících relací na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je ekvivalence a pro ty, které jsou ekvivalence, najděte třídu ekvivalence $[(3, 4)]_{R_i}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$:

a) $R_1 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 b_2 = a_2 b_1\}$,
b) $R_2 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 + b_2 = a_2 + b_1\}$,
c) $R_3 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 - a_2 = b_1 - b_2\}$,
d) $R_4 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 - a_2 = b_2 - b_1\}$.

Příklad 4: Na množině $A = \{a, b, c, d, e\}$ je dána relace $\sigma = \{(a, b), (c, b), (d, e)\}$.

a) Vytvořte $Sy(Re(\sigma)) = \tau$,

b) vytvořte $\mathsf{Tr}(\mathsf{Sy}(\mathsf{Re}(\sigma))) = \epsilon$,
c) pro vytvořenou relaci tolerance τ určete třídy tolerance a tolerancí indukované pokrytí,
d) pro vytvořenou relaci ekvivalence ϵ určete třídy ekvivalence a ekvivalencí indukovaný rozklad.
e) Vytvořte faktorovou množinu množiny A dle ekvivalence ϵ.
f) Zapište kanonické (přirozené) zobrazení f množiny A na faktorovou množinu A/ϵ. Kanonické zobrazení je surjekcí, injekcí, bijekcí či ani jedno z dříve uvedených?

Příklad 5: Připomeňte si definici uzávěrového systému a vlastnosti uzávěrového operátoru. Rozhodněte, zda jsou uvedené systémy množin uzávěrovými systémy. Pokud jsou, tak určete uzávěr dané podmnožiny X_i v daném uzávěrovém systému. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$.

a) $\mathcal{C}_1 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, A\}$, $X_1 = \{b, c\}$,
b) $\mathcal{C}_2 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, A\}$, $X_2 = \{b, c\}$,
c) $\mathcal{C}_3 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_3 = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, A\}$, $X_3 = \{b, c\}$,
d) $\mathcal{C}_4 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_4 = \{R \subseteq A \times A, R \text{ je souvislá}\}$, $X_4 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$,
e) $\mathcal{C}_5 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_5 = \{R \subseteq A \times A, R \text{ je úplná}\}$, $X_5 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$,
f) $\mathcal{C}_6 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_6 = \{R \subseteq A \times A, R \text{ je tranzitivní}\}$, $X_6 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$,
g) $\mathcal{C}_7 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_7 = \{R \subseteq A \times A, R \text{ je ekvivalencí}\}$, $X_7 = \{(a, c), (b, b), (d, b)\}$,
h) $\mathcal{C}_8 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_8 = \{R \subseteq A \times A, R \text{ je antisymetrická}\}$, $X_8 = \{(a, c), (b, b), (b, c)\}$.

Příklad 6: Ověřte, zda dále uvedené množiny relací $\rho_i \in P(A \times A)$, kde $A \neq \emptyset$, tvoří uzávěrový systém na $A \times A$.

a) ρ_1 jsou všechny reflexivní relace,
b) ρ_2 jsou všechny ireflexivní relace,
c) ρ_3 jsou všechny symetrické relace,
d) ρ_4 jsou všechny asymetrické relace,
e) ρ_5 jsou všechny tranzitivní relace,
f) ρ_6 jsou všechny relace tolerance,
g) ρ_7 jsou všechny relace ekvivalence,
h) ρ_8 jsou všechny relace uspořádání.

Příklad 7: Následující sociální situaci reprezentujte pomocí grafu, hypergrafu a simpliciálního komplexu. A,B,C spolu chodí na pivo, B,C,D spolu chodí do školy, B,D,E spolu hrají deskové hry, A,D spolu hrají tenis, D,F spolu bydlí, B,F spolu jezdí busem a E,F jsou sourozenci. Hypergraf zakreslete ve formě bipartitního grafu (pro snazší přehlednost).
Uveďte, které informace se ztrácí/uchovávají v každé z uvedených reprezentací).

Příklad 8: Pomocí orientovaného grafu zakreslete řešení následujícího problému. Čtyři výletníci mají překonat hlubokou rokli, přes kterou vede most, protože na druhé straně rokle jim za 60 minut jede autobus do civilizace. Bohužel je most již vetchý a taky je už tma (je zimní semestr). Takže přecházet přes most mohou najednou nejvýše dvě osoby, které si musí svítit svou jedinou slabou baterkou (jsou to odpůrci mobilních technologií a nemají mobily) osvětlující jen malý prostor kolem. Navíc má každý z těchto čtyř lidí jinou fyzickou kondici. První zvládne překročit most na druhou stranu za 5 minut, druhý za 10 minut, třetí za 20 minut a čtvrtý za 25 minut. Stihnou všichni výletníci ten poslední bus za 60 minut?

Příklad 9: Uvažujme k hromádek sirek, kdy v i-té hromádce je $n_i \geq 1$ sirek, $i = 1, \ldots, k$. Hráči střídavě odebírají sirky z hromádek. V daném tahu si hráč zvolí hromádku, z které bude odebírat (kde ještě nejsou odebrány všechny sirky) a odebere minimálně jednu a maximálně všechny sirky vybrané hromádky. Hráč, který odebere poslední sirku, vyhrál.

a) Nakreslete grafy (uzly = možné stavy), které odpovídají hrám Nim(2,2) a Nim(3,2).
b) Určete jádro grafu pro Nim(2,2) a Nim(3,2).