Cvičení 1

Pojmy potřebné pro zvládnutí cvičení: kartézský součin; relace; relační systém; vlastnosti binárních homogenních relací; binární relace a grafy (orientované); skládání binárních relací – komutativita, asociativata; inverzní relace; speciální homogenní binární relace – identita, ekvivalence a uspořádání; uzávěr relace (Re, Sy, Tr); funkce (zobrazení) – injekce (prostá), surjekce (na), bijekce (vzájemně jednoznačná).

Příklad 1: Určete a formálně zapište kartézský součin následujících množin. Zamyslete se nad asociativitou, komutativitou, existencí neutrálního (jednotkového) a existencí agresivního (nulového) prvku pro operaci kartézského součinu dvou množin.

a) $\{a, b\} \times \{1, 2\}$
b) $\{1, 2, 3\} \times \mathbb{R}$
c) $\{1, 2\} \times \{a, b\}$
d) $\emptyset \times \{1, 2, 4\}$
e) $\{a, b\} \times \{\{1\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$
f) $\{a, b\} \times \{1, 2\} \times \{u, v\}$
g) $(\{a, b\} \times \{1, 2\}) \times \{u, v\}$
h) $\{a, b\} \times (\{1, 2\} \times \{u, v\})$
i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

Příklad 2: Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, \}$ a $B = \{d, e, f\}$. Rozhodněte, zda daná množina R_i je relací. Pokud je relací, tak určete relační systém, ve kterém je definovatelná a signaturu relace v tomto relačním systému.

a) $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
b) $R_2 = \{a, b\}$
c) $R_3 = \{(a, d), (b, d)\}$
d) $R_5 = \{(b, b), (c, d)\}$
e) R_6 obsahuje následující prvky: $(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (c, b), (a, c)$
f) $R_7 = \{(a, d, e), (c, f, d), (b, d, d)\}$
g) $R_8 = \{(x, y, z); x \in A, y \in A, z \in B\}$

Příklad 3: Určete vlastnosti binárních homogenních relací na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Relace zakreslete pomocí orientovaných grafů. U všech relací pak uveďte, co musíte přidat, aby jste vytvořili reflexivní (Re), symetrický (Sy) či tranzitivní (Tr) uzávěr dané relace.

a) $R_a = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
b) $R_b = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$
c) $R_c = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
d) $R_d = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$
e) $R_e = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$

f) $R_f = \emptyset$
g) $R_g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$
h) $R_h = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4),(2,4),(1,3)\}$
i) $R_i = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4),(2,1),(1,3),(2,3)\}$

Příklad 4: Je dána množina $A = \{a, b, c\}$. Pomocí orientovaných grafů $G_i = (A, R_i)$ nakreslete alespoň tři relace s co nejmenším počtem prvků, které jsou na množině A:

a) reflexivní,
b) symetrické (ale ne reflexivní),
c) asymetrické,
d) antisymetrické (ale ne asymetrické),
e) tranzitivní.

Zamyslete se nad počtem všech relací daného typu a všech možných relací nad množinou A.

Příklad 5: Navrhněte algoritmus, který pro libovolnou konečnou množinu V vygeneruje zadané množství relací, které jsou:

a) RE,
b) AN,
c) SY.

Navrhněte algoritmus, kterým ověříte, že daná relace má konkrétní (RE, IR, SY, AS, AN, TR) vlastnosti (a jejich libovolné kombinace).

Příklad 6: Určete na množině $A = \{a, b, c\}$ nejmenší a největší (co do počtu hran) možné relace, které mají níže uvedené vlastnosti.

a) RE, SY, TR,
b) RE, SY, není TR,
c) AS, TR
d) AN,TR, není AS
e) SY, IR,
f) AN, IR.

U příkladu c) doplňte prvky relace tak, aby byla výsledná relace reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tj. utvořte ekvivalenční uzávěr dané relace. Záleží na pořadí provádění jednotlivých uzávěrů (Re+Sy+Tr nebo Re+Tr+Sy?)

Příklad 7: Je slovně popsána binární heterogenní relace $\rho \subseteq \mathtt{lidi} \times \mathtt{aktivity}$, kde $\mathtt{lidi} =$ {Adam, Béďa, Cyril, Dan, Ernesto, Filip} a $\mathtt{aktivity} =$ { ragby, šachy,tenis, ukulele, vodní polo}:

- Adam hraje šachy a ragby.
- Béďa hraje na ukulele a šachy.
- Cyril hraje ragby, vodní polo a tenis.
- Dan hraje na ukulele a vodní polo a tenis.
- Ernesto hraje na ukulele a tenis.
- Filip hraje šachy a tenis.

Danou relaci zakreslete pomocí bipartitního grafu a také pomocí matice sousednosti. Zamyslete se, co reprezentují složené relace $\rho \circ \rho^{-1}$ a $\rho^{-1} \circ \rho$ a co reprezentují matice $A(\rho) \cdot A(\rho^{-1})$ a $A(\rho^{-1}) \cdot A(\rho)$. Výsledné relace zakreslete pomocí grafů. Jaké vlastnosti tyto relace mají?

Příklad 8: Na množinách $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ a $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ jsou dány relace $R_1 = \{(a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1)\}$, $R_2 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_2), (b_3, c_1), (b_4, c_3)\}$, $R_3 = \{(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3), (c_3, d_4)\}$ a $R_4 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_2), (a_3, a_1), (a_2, a_3)\}$.

a) Zakreslete relace R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ pomocí VHODNÝCH grafů.
b) Určete, zda je relace R_i $(i = 1, 2, 3)$ zobrazením a pokud ano, tak jakým.
c) Určete relaci inverzní k R_i a ověřte, zda je zobrazením a případně jakým.
d) Vytvořte složené relace $R_{12} = R_1 \circ R_2$, $R_{23} = R_2 \circ R_3$, $R_{13} = R_{12} \circ R_3$, $R^*_{13} = R_1 \circ R_{23}$, $R_{11} = R_{12} \circ R^{-1}_{12}$ a $R_{22} = R^{-1}_{12} \circ R_{12}$. Určete, zda se jedná o zobrazení a jaké.
e) Platí, že: $R_{13} = R_{12} \circ R_3$, $R^*_{13} = R_1 \circ R_{23}$? Platí, že skládání relací je asociativní? Pokud ne, uveďte protipříklad.
f) Platí, že: $R_4 \circ R_4^{-1} = R_4^{-1} \circ R_4$? Je výsledkem skládání relace s relací inverzní vždý identická relace (id_A)? Platí, že skládání relací je komutativní? Pokud ne, uveďte protipříklad.

Příklad 9: Rozhodněte, zda jsou následující relace zobrazeními a pokud ano, tak jakými.

a) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c)\}$
b) $R \subseteq \{a, b\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c)\}$
c) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b\}$, kde $R = \{(a, b), (b, b), (c, a)\}$
d) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$
e) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$
f) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$
g) $RE \subseteq P(A \times A) \times P(A \times A)$, kde $RE = \{(R, Re(R)); R \in P(A \times A), Re(R)$ je reflexivní uzávěr binární homogenní relace $R\}$